КЛАССИЧЕСКИЕ И ОБОБЩЁННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим двумерное квазилинейное уравнение первого порядка в дивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(f(u)\big) + c(x,t)u = 0$$

и соответствующую задачу Коши с *начальным условием* $u\big|_{t=0} = v(x)$ и, возможно, *периодическим условием* $u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)$ (в этом случае начальная функция также должна удовлетворять периодическому условию $v(x+2\pi) \equiv v(x)$). Здесь f — бесконечно дифференцируемая на прямой *функция состояния*, c — бесконечно дифференцируемый при $x \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$ (и 2π-периодический по x, если задача с периодическим условием) коэффициент. Требуется:

1) найти общее решение системы характеристик или получить два независимых первых интеграла;
2) если найдено общее решение, то получить параметризацию характеристической поверхности задачи Коши для произвольной начальной функции $v \in C^1$;
3) получить неявное уравнение характеристической поверхности (исключив параметры из параметризации характеристической поверхности или с помощью первых интегралов);
4) привести пример нетривиальной начальной функции $v \in C^1$ ($v \in L_\infty(\mathbb{R})$, если периодическое условие не задано), такой, что классическое решение задачи Коши существует для любого $t \geqslant 0$, либо доказать, что такой нетривиальной начальной функции не существует);
5) привести пример начальной функции $v \in C^1$ ($v \in L_\infty(\mathbb{R})$, если периодическое условие не задано) с тем свойством, что классическое решение задачи Коши терпит *градиентную катастрофу* при $t \to T^* - 0$, найти время $T^* > 0$ градиентной катастрофы (возможно, численным методом), построить на компьютере график этого решения в момент $t = T^*$ (либо доказать, что все классические решения избегают градиентной катастрофы);
6) определить обобщённое (слабое) решение квазилинейного уравнения и задачи Коши для него;
7) привести пример ударной волны, которая служит нетривиальным обобщёнными решением задачи Коши с нулевой начальной функцией (в крайнем случае, привести пример любой ударной волны).

Ресурсы для решения дом. задания #2

1. Пример решения задания #2.
2. *Пар. 8.3-8.5* главы 8 «Уравнения первого порядка» книги А.Е. Байкова (в середине ноября).
3. А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин. Уравнения с частными производными первого порядка: учебное пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999: http://new.math.msu.su/diffur/pde-first.pdf
4. Evans, L.C. Partial Differential Equations. Second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010 (chapters 3, 7).

Номер варианта студента/студентки равен номеру в списке его группы. Задание выполняется на стандартных листах A4 чёрной или тёмно-синей ручкой и сдаётся преподавателю на лекциях/практических занятиях. Кроме того, скан/фото листочков с решением можно высылать на alexander@baikov.org или отправлять в LMS на странице курса, применяя соответствующий функционал. За пп. 1-4, 6 даётся по 1 баллу, за пп. 5, 7 — по 2 балла. Полное решение дом. задания #2 приносит 9 баллов. Защит нет. Дедлайн для всех групп — **21.11.26, 23:59.**

Список вариантов

Вариант 1 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sin u\right) = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi, t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$	**Вариант 2** $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}u^2\right) - u = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi, t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$
Вариант 3 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{4}u^4\right) = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$	**Вариант 4** $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}u^2\right) + ut = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$
Вариант 5 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\cos u\right) - u = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi, t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$	**Вариант 6** $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\cos u\right) - u = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi, t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$

Вариант 7

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}u^2\right) + u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\cos u) = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{4}u^4\right) = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}u^2\right) - ut = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$$

Вариант 11

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}u^2\right) - 2u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 12

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{6}u^6\right) + u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 13

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(-\sin u) = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 14

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\cos u) + u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 15

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{6}u^6\right) - u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$$

Вариант 16

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}u^2\right) - u\cos x = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$$

Вариант 17

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\arctan u) = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$$

Вариант 18

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right) - u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$$

Вариант 19

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right) = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 20

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\arctan u) + u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$$

Вариант 21 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right) + u = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$	**Вариант 22** $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\arctan u) = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$
Вариант 23 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{4}u^4\right) - u = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi, t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$	**Вариант 24** $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}u^2\right) + u\sin x = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x), \\ u(x+2\pi, t) \equiv u(x,t)\,. \end{cases}$
Вариант 25 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\arctan u) - u = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$	**Вариант 26** $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{4}u^4\right) + u = 0, \\ u\big\vert_{t=0} = v(x)\,. \end{cases}$