ДОМ. ЗАДАНИЕ #2

по «Уравнениям в частных производных»

КЛАССИЧЕСКИЕ И ОБОБЩЁННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим квазилинейное уравнение первого порядка в дивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(f(u)\big) + c(x,t)u = 0$$

и соответствующую задачу Коши с *начальным условием* $u\big|_{t=0} = v(x)$ и, возможно, *периодическим условием* $u(x+2\pi,t) \equiv u(x,t)$ (в этом случае начальная функция также должна удовлетворять периодическому условию $v(x+2\pi) \equiv v(x)$). Здесь f — бесконечно дифференцируемая на прямой *функция состояния*, c — бесконечно дифференцируемый при $x \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant 0$ (и 2π-периодический по x, если задача с периодическим условием) коэффициент. Требуется:

1) найти общее решение системы характеристик или получить два независимых первых интеграла;
2) если найдено общее решение, то получить параметризацию характеристической поверхности задачи Коши для произвольной начальной функции $v \in C^1$;
3) получить неявное уравнение характеристической поверхности (исключив параметры из параметризации характеристической поверхности или с помощью первых интегралов);
4) привести пример нетривиальной начальной функции $v \in C^1$ ($v \in L_\infty$, если периодическое условие не задано), такой, что классическое решение задачи Коши существует для любого $t \geqslant 0$, либо доказать, что такой нетривиальной начальной функции не существует;

5) привести пример начальной функции $v \in C^1$ ($v \in L_\infty(\mathbb{R})$, если периодическое условие не задано) с тем свойством, что классическое решение задачи Коши терпит *градиентную катастрофу* при $t \to T^* - 0$, найти время $T^* > 0$ градиентной катастрофы (возможно, численным методом), построить на компьютере график этого решения в момент $t = T^*$ (либо доказать, что все классические решения избегают градиентной катастрофы);
6) определить обобщённое решение квазилинейного уравнения и задачи Коши для него;
7) привести пример ударной волны, которая служит нетривиальным обобщёнными решением задачи Коши с нулевой начальной функцией (в крайнем случае, привести пример любой ударной волны).

Пример. Рассмотрим задачу Коши для квазлинейного уравнения первого порядка с периодическим условием по пространственной переменной x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\cos u) + u = 0, \\ u\big|_{t=0} = v(x), \\ u(x + 2\pi, t) \equiv u(x, t)\,. \end{cases} \qquad (0)$$

Предполагается, что начальная функция v также удовлетворяет периодическому условию по x:
$v(x + 2\pi) \equiv v(x)$.

1) Найдём общее решение системы характеристик.

Система характеристик для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sin u \frac{\partial u}{\partial x} = -u$$

в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin u, \\ \dot{t} = 1, \\ \dot{u} = -u, \end{cases} \qquad (1)$$

где точка — производная по фазовому времени p. Второе уравнение немедленно интегрируется: $t = p + t_0$, $t_0 = t\big|_{p=0}$.

Из третьего уравнения системы (1) получим:

$$u = u_0 e^{-p}, \text{ где } u = u_0.$$

Интегрируем первое уравнение системы (1) после подстановки u:

$$x = -\int_0^p \sin\left(u_0 e^{-\tilde{p}}\right) d\tilde{p} + x_0 = \left\{ s = u_0 e^{-p}, \right.$$

$$\left. -\int \frac{\sin s}{s} ds = -\operatorname{Si}(s) + \text{const} \right\} = \operatorname{Si}\left(u_0 e^{-p}\right) - \operatorname{Si}\left(u_0\right) + x_0 .$$

Таким образом, общее решение системы характеристик имеет вид:

$$\begin{cases} x = \operatorname{Si}\left(u_0 e^{-p}\right) - \operatorname{Si}\left(u_0\right) + x_0, \\ t = p + t_0, \\ u = u_0 e^{-p} . \end{cases} \qquad (2)$$

2) Получим параметризацию характеристической поверхности задачи Коши для произвольной начальной функции $v \in C^1$.

Положим в общем решении (2) $t_0 = 0$, $u_0 = v\left(x_0\right)$, получим параметризацию характеристической поверхности:

$$S:\begin{cases} x = \mathrm{Si}\left(v\left(x_0\right)e^{-p}\right) - \mathrm{Si}\left(v\left(x_0\right)\right) + x_0, \\ t = p, \\ u = v\left(x_0\right)e^{-p}. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь параметры x_0 и p могут принимать произвольные вещественные значения (либо $-\infty < x_0 < +\infty$, $0 \leqslant p < +\infty$, если нужна только S_+). Проверим, что поверхность S гладкая, точнее $S \in C^1$, если $v \in C^1(\mathbb{R})$. Действительно, касательные векторы суть

$$\vec{\xi} = \frac{\partial x}{\partial x_0}\vec{e}_x + \frac{\partial t}{\partial x_0}\vec{e}_t + \frac{\partial u}{\partial x_0}\vec{e}_u = \Bigg(\mathrm{sinc}\left(v\left(x_0\right)e^{-p}\right)v'\left(x_0\right)e^{-p} -$$

$$-\mathrm{sinc}\left(v\left(x_0\right)e^{-p}\right)v'\left(x_0\right) + 1\Bigg)\vec{e}_x + v'\left(x_0\right)e^{-p}\vec{e}_u,$$

$$\vec{\eta} = \frac{\partial x}{\partial p}\vec{e}_x + \frac{\partial t}{\partial p}\vec{e}_t + \frac{\partial u}{\partial p}\vec{e}_u = -e^{-p}\mathrm{sinc}\left(v\left(x_0\right)e^{-p}\right)\vec{e}_x + \vec{e}_t - e^{-p}v\left(x_0\right)\vec{e}_u,$$

где $\mathrm{sinc}\, s = \dfrac{\sin s}{s}$ — кардинальный синус. Поскольку

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \mathrm{sinc}\left(v\left(x_0\right)e^{-p}\right)v'\left(x_0\right)e^{-p} - \mathrm{sinc}\left(v\left(x_0\right)\right)v'\left(x_0\right) + 1 & 0 & v'\left(x_0\right)e^{-p} \\ -e^{-p}v\left(x_0\right)\mathrm{sinc}\left(v\left(x_0\right)e^{-p}\right) & 1 & -e^{-p}v\left(x_0\right) \end{pmatrix} = 2$$

(если $v'\left(x_0\right) \neq 0$, то M_{23} — базисный минор, если $v'\left(x_0\right) = 0$, то M_{12} — базисный минор), векторы $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ линейно независимы во всех точках и образуют касательную плоскость.

3) **Получим неявное уравнение характеристической поверхности** S**.** Для этого исключим параметры x_0 и p из параметризации (3). Параметр p исключается мгновенно: $p = t$. Для исключения параметра x_0 из системы

$$\begin{cases} x = \mathrm{Si}\left(v\left(x_0\right)e^{-t}\right) - \mathrm{Si}\left(v\left(x_0\right)\right) + x_0, \\ u = v\left(x_0\right)e^{-t} \end{cases} \qquad (4)$$

подставим $v\left(x_0\right) = e^t u$ в первое уравнение и выразим x_0:

$$x_0 = x - \operatorname{Si} u + \operatorname{Si}\left(e^t u\right).$$

Тогда второе уравнение системы (4) даст неявное уравнение характеристической поверхности:

$$u = e^{-t} v\left(x - \operatorname{Si} u + \operatorname{Si}\left(e^t u\right)\right). \quad (5)$$

Если v — 2π-периодическая функция, то уравнение (5) выдерживает преобразование $x \mapsto x + 2\pi$, поэтому неявная функция (5) в этом случае тоже будет 2π-периодической по x.

4) Приведём пример нетривиальной начальной функции $v \in C^1$, такой, что классическое решение задачи Коши существует для любого $t \geqslant 0$. Отображение проектирования $\mathscr{P} : S_+ \to \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$ характеристической поверхности S_+ на цилиндр аналитически задаётся формулами

$$\begin{cases} x = \operatorname{Si}\left(v\left(x_0\right) e^{-p}\right) - \operatorname{Si}\left(v\left(x_0\right)\right) + x_0, \\ t = p \end{cases} \quad (6)$$

(параметры x_0, p задают точку на поверхности, формулы (6) дают проекции этой точки на цилиндр $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$).

Якобиан отображения (6):

$$J = \begin{vmatrix} \operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right) e^{-p}\right) v'\left(x_0\right) e^{-p} - \operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right)\right) v'\left(x_0\right) + 1 & -e^{-p} \operatorname{sinc} v\left(x_0\right)\left(v\left(x_0\right) e^{-p}\right) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right) e^{-p}\right) e^{-p} - \operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right)\right)\right) v'\left(x_0\right) + 1.$$ Если $p = 0$, то $J = 1 > 0$ и в окрестности $\gamma = \mathbb{T}^1 \times \{t = 0\}$ графика начальной функции задача Коши имеет единственное решение (это неизбежно, потому что задача Коши стандартна, условие трансверсальности выполнено автоматически, поэтому задача Коши локально однозначно разрешима). Так как в задаче есть периодическое условие, можно считать, что пространство независимых переменных — это цилиндр $C = \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$, где $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — окружность. Таким

образом, график начальной функции Γ — замкнутая кривая в $C \times \mathbb{R}$, проекция которой на C даёт окружность $\mathbb{T}^1$. Задача Коши однозначно разрешима в некотором замкнутом слое вида

$$\overline{\Pi}_T = \left\{ x \in \mathbb{T}^1, 0 \leqslant t \leqslant T \right\},$$

причём супремум возможного времени существования ($T_* = \sup T$) зависит от начальной функции $v \in C^1\left(\mathbb{T}^1\right)$.

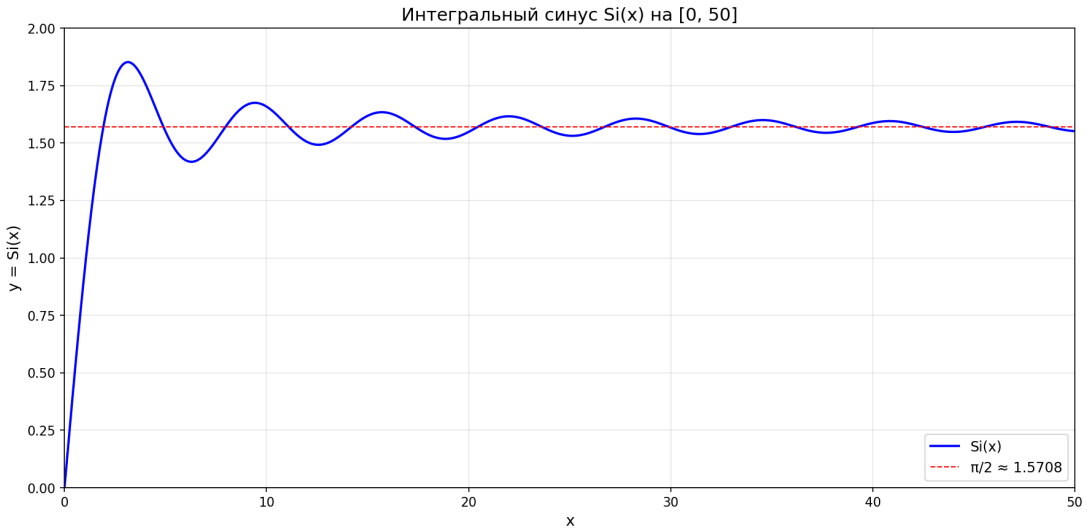
В критических точках якобиан отображения проектирования обращается в нуль:

$$\left(\operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right) e^{-p} \right) e^{-p} - \operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right) \right) \right) v'\left(x_0\right) + 1 = 0. \quad (7)$$

Фиксировав x_0 в равенстве (7) и устремив $p \to +\infty$, получим

$$-\operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right) \right) v'\left(x_0\right) + 1 = 0.$$

Если мы хотим получить решение, существующее при всех $t \geqslant 0$, то якобиан проектирования должен оставаться положительным. Предположим, что $v > 0$ на $\mathbb{T}^1$; тогда,



поскольку интегральный синус положительный при положительном значении переменной (и стремится к $\dfrac{\pi}{2}$ при стремлении переменной к плюс бесконечности; см. график выше), неравенства

$$-\operatorname{sinc}\left(v\left(x_0\right)\right)v'\left(x_0\right)+1\geqslant 0 \quad (8)$$

будет достаточно для того, чтобы уравнение (7) не имело решений на множестве $p\geqslant 0$ при любом $x_0\in\mathbb{T}^1$. Можно взять постоянную положительную функцию v, например, $v\equiv 1$ на $\mathbb{T}^1$. Из неявного уравнения (5) решение задачи Коши с данной начальной функцией есть $u=e^{-t}$. Конечно, его можно было бы угадать без рассуждений про якобиан, но, во-первых, мы проверили формулы (3), (5) на таком простом примере, во-вторых, якобиан нам ещё пригодится в следующем пункте.

5) **Приведём пример такой начальной функции $v\in C^1$, что классическое решение терпит *градиентную катастрофу* при $t\to T^*-0$, найдём время $T^*>0$ градиентной катастрофы, построим на компьютере график этого решения в момент $t=T^*$.** Теперь уравнение (7) должно иметь положительное решение относительно p при некотором $x_0\in\mathbb{T}^1$. Рассмотрим начальную функцию вида

$$v(x)=\mu\cos x, \quad (9)$$

где $\mu>0$ — параметр. Уравнение (7) принимает для такой начальной функции вид

$$F\left(p,x_0;\mu\right)=0, \quad (10)$$

где $F\left(p,x_0;\mu\right)=-\mu\left(\operatorname{sinc}\left(\left(\mu\cos x_0\right)e^{-p}\right)e^{-p}-\operatorname{sinc}\left(\mu\cos x_0\right)\right)\sin x_0+1$. При $\mu=0$ решений оно не имеет. Выясним, при каких положительных μ оно имеет относительно $p>0$ решение при некотором $x_0\in\mathbb{T}^1$.

Положим $q=e^{-p}\in(0,1)$ и $m=\mu\cos x_0$. Уравнение (10) можно переписать так:

$$\mu\sin\left(-x_0\right)\frac{\sin m-\sin(mq)}{m}=\mu\sin\left(-x_0\right)\int_q^1\cos\left(m\tilde{q}\right)d\tilde{q}=1 \quad (11)$$

Утверждение. Уравнение (11) имеет корень $q \in (0,1)$ при некотором x_0 тогда и только тогда, когда $\mu > 1$.

Доказательство. Необходимость. Так как $\cos\left(m\tilde{q}\right) \leqslant 1$, $\int_q^1 \cos\left(m\tilde{q}\right) d\tilde{q} \leqslant 1 - q < 1$, поэтому левая часть уравнения (11) строго меньше μ. Если $\mu \leqslant 1$, то левая часть строго меньше 1, и корня нет.

Достаточность. Пусть $\mu > 1$. Возьмём $x_0 = -\pi/2$, тогда $\cos x_0 = 0$, $\sin\left(-x_0\right) = 1$, $m = 0$, уравнение сводится к $\mu(1-q) = 1$. Отсюда $q = 1 - \dfrac{1}{\mu} \in (0,1)$ и $p = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right) > 0$■

Отметим, что указанный в доказательстве корень вовсе не обязательно минимальный: вполне возможно, что градиентная катастрофа наступает раньше и/или в другой точке. Покажем, однако, что это не так.

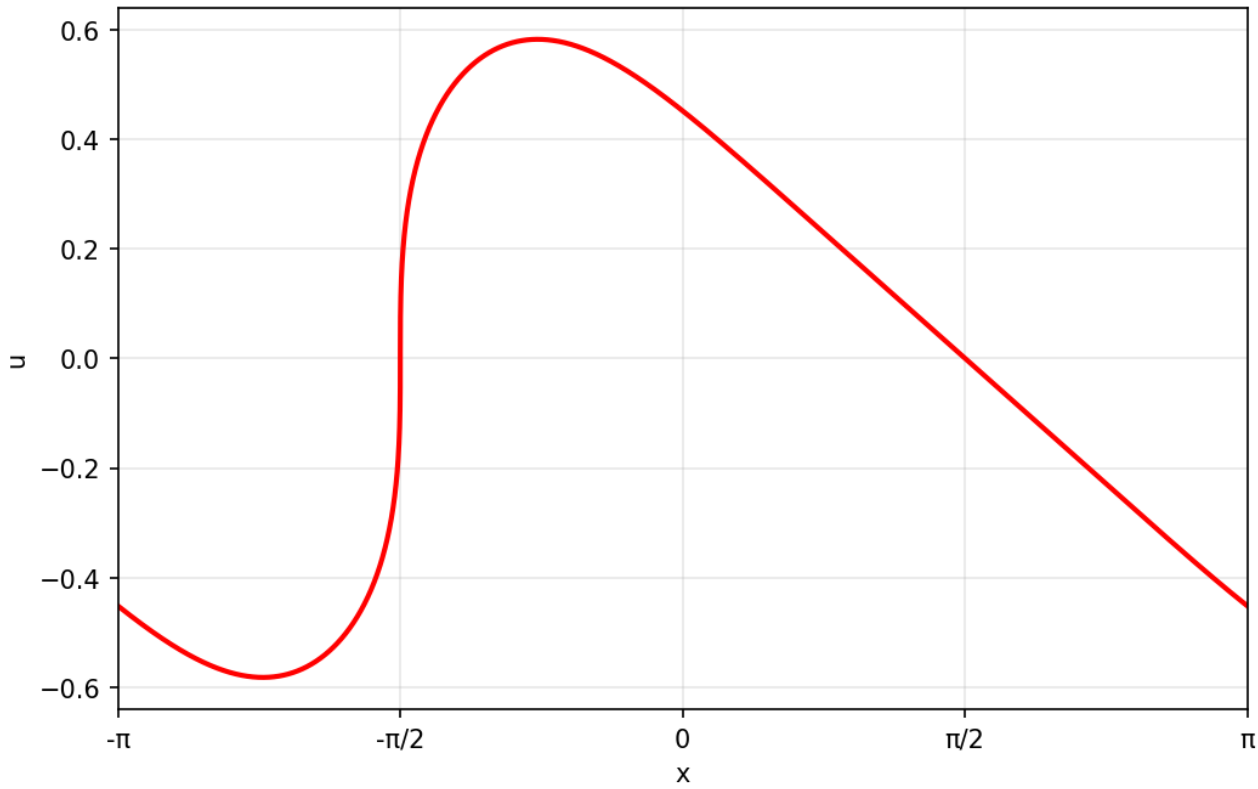
Действительно, левая часть уравнения (11) удовлетворяет оценке $\mu \sin\left(-x_0\right) \int_q^1 \cos\left(m\tilde{q}\right) d\tilde{q} \leqslant \mu(1-q)$. Корень возможен только тогда, когда $\mu(1-q) \geqslant 1$, т.е. при $q \leqslant 1 - \dfrac{1}{\mu}$. Это равносильно тому, что $p \geqslant -\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right)$; следовательно,

$T_* = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right)$ — время градиентной катастрофы для начальной функции (9) при $\mu > 1$.

Равенство достигается при $\sin\left(-x_0\right) = 1$, т.е. когда $x_0 \equiv -\dfrac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Точка $x_* \in \mathbb{T}^1$, в которой происходит градиентная катастрофа, исчисляется по формуле

$$x_* \equiv \mathrm{Si}\left(\mu e^{-T_*}\cos x_0\right) - \mathrm{Si}\left(\mu\cos x_0\right) + x_0 \equiv -\frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

В MAPLE-приложении к примеру на странице курса (для установки free-trial версии см. https://www.maplesoft.com/products/maple/free-trial) построена анимация решения задачи Коши до наступления градиентной катастрофы. График решения (при $\mu = \dfrac{e}{e-1} \approx 1.5820$) показан на рис. ниже.



В этом случае $T_* = 1$.

6) Определим обобщённое (слабое) решение квазилинейного уравнения и задачи Коши для него.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\cos u) + u = 0 \quad (12)$$

в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ и пусть $u \in C^1(\Omega)$ — его классическое решение в этой области. Умножим уравнение (12) на основную функцию $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\cos u) + u \right) \varphi dx dt = 0. \quad (13)$$

На самом деле интегрирование происходит по борелевскому множеству $K = \operatorname{supp} \varphi$ (компактному носителю основной функции φ), но последнее зависит от выбора φ, поэтому ставим под интегралом Ω. Погрузим $K = \operatorname{supp} \varphi$ в строго внутреннюю подобласть $Q \Subset \Omega$ с границей $\partial Q \in C^1$. Применим к интегралу из левой части формулы (13) формулу интегрирования по частям:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \cos u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u\varphi \right) dx dt = 0 \quad (14)$$

(мы сократили на -1 и учли, что φ равна нулю на ∂Q). В основу определения обобщённого решения берётся равенство (14), причём рассматривается класс функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых существует интеграл Лебега в левой части.

Определение. Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ называется обобщённым (слабым) решением уравнения (12) в области $\Omega \subset \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, если:

1) $u \in L_{1,loc}(\Omega)$, $\cos u \in L_{1,loc}(\Omega)$;
2) для любой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ выполнено интегральное равенство (тождество) (14).

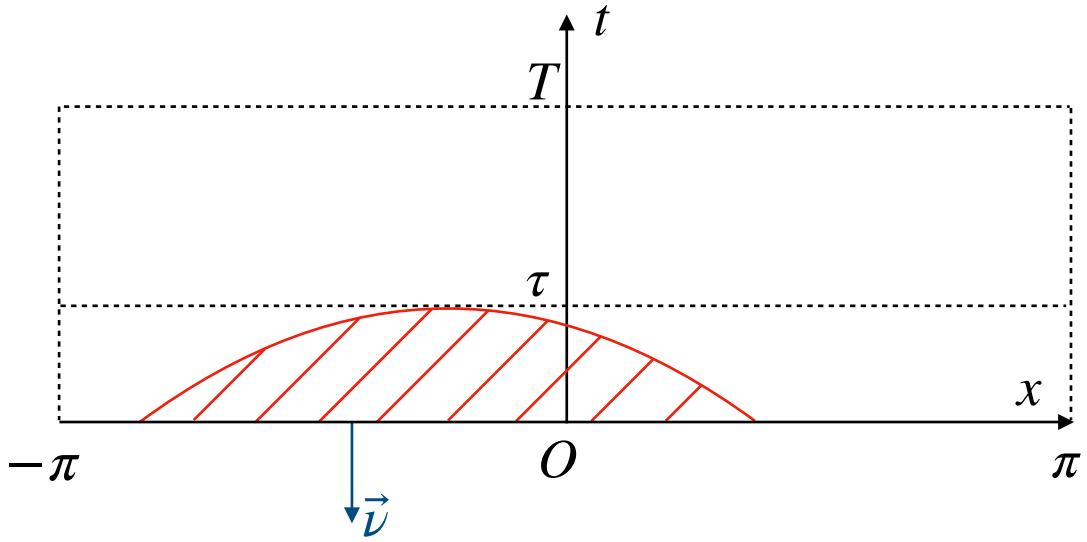
Отметим, что обобщённое решение уравнения всегда определяется в фиксированной области. Далее, условие $\cos u \in L_{1,loc}(\Omega)$ избыточно, так как $\cos u \in L_{1,loc}(\Omega)$ для любой измеримой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$, но необходимо для других функций состояния, например, $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ в уравнении Хопфа.

Определим теперь обобщённое решение задачи Коши (0) в области $\Pi_T = \mathbb{T}^1 \times (0,T)$ — цилиндрическом слое. Здесь $0 < T \leqslant +\infty$. Обозначим $\widetilde{\Pi}_T = \mathbb{T}^1 \times [0,T)$ — полузамыкание цилиндрического слоя. Рассмотрим классическое решение $u \in C^1\left(\widetilde{\Pi}_T\right)$ задачи Коши (0). Умножим уравнение на функцию $\varphi \in C^\infty\left(\widetilde{\Pi}_T\right)$, носитель которой $\operatorname{supp}\varphi \subset \widetilde{\Pi}_T$ и компактен:

$$\iint\limits_{\Pi_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\cos u) + u \right) \varphi dx dt = 0. \quad (15)$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\Pi}_\tau$, где $\tau \in (0,T)$. В этот раз интегрирование по частям даёт интеграл по нижней границе (основанию) цилиндра, потому что носитель основной функции φ может на неё опираться (см. рис. ниже, на котором носитель φ показан красным штрихом):

$$\iint\limits_{\Pi_T} \left(-u\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \cos u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u\varphi \right) dx dt + \int\limits_{\mathbb{T}^1} u\big|_{t=0}\, \varphi(x,0)(-1)dx = 0. \quad (16)$$



Знак «−» в интеграле по $\mathbb{T}^1$ связан с тем, что нормаль к нижнему основанию цилиндра направлена против оси Ot

(синяя на рис. сверху). Умножим равенство (16) на (-1) и учтём начальное условие в задачи Коши (0):

$$\iint\limits_{\Pi_T} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \cos u\frac{\partial\varphi}{\partial x} - u\varphi \right) dxdt + \int\limits_{\mathbb{T}^1} v(x)\varphi(x,0)dx = 0. \quad (17)$$

Предположим, что в задаче Коши (1) функция $v \in L_1\left(\mathbb{T}^1\right)$. Подумаем тогда, для каких функции $u : \widetilde{\Pi}_T \to \mathbb{R}$ интеграл в левой части равенства (17) может иметь смысл…

Определение. Измеримая функция $u : \widetilde{\Pi}_T \to \mathbb{R}$ — обобщённое решение задачи Коши, если: 1) $u \in L_{1,loc}\left(\widetilde{\Pi}_T\right)$, $\cos u \in L_{1,loc}\left(\widetilde{\Pi}_T\right)$, т.е. для любого компакта $K \subset \widetilde{\Pi}_T$ интегралы $\iint_K |u|\,dxdt$ и $\iint_K |\cos u|\,dxdt$ конечны; 2) для любой функции $\varphi \in C^\infty\left(\widetilde{\Pi}_T\right)$ выполнено интегральное равенство (17).

Требование $\cos u \in L_{1,loc}\left(\widetilde{\Pi}_T\right)$ в определении излишне, так как $\cos u$ всегда локально суммируемая для любой измеримой функции $u : \widetilde{\Pi}_T \to \mathbb{R}$. Но для других функций состояния, например, $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, это условие обязательно.

Вернёмся к определению обобщённого решения уравнения (12). Допустим, что область Ω разделена на две части Ω_+ и Ω_- кривой класса $\gamma \subset \Omega$ класса C^1: $\Omega = \Omega_- \sqcup \gamma \sqcup \Omega_+$. Пусть $\vec{\nu}$ — ориентирующее γ поле единичных нормалей. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ имеет класс $\tilde{C}^1$ с линией разрыва γ, если $u\big|_{\Omega_+} \in C^1\left(\Omega_+ \cup \gamma\right)$, $u\big|_{\Omega_-} \in C^1\left(\Omega_- \cup \gamma\right)$. В любой точке $(x_0, t_0)^\top \in \gamma$ такая функция имеет односторонние пределы

$$u_-(x_0,t_0) = \lim_{\Omega_- \ni (x,t)^T \to (x_0,t_0)^T} u(x,t),\ u_+(x_0,t_0) = \lim_{\Omega_+ \ni (x,t)^T \to (x_0,t_0)^T} u(x,t).$$

Определение. *Ударной волной* называется обобщённое решение уравнения (12) класса $\tilde{C}^1$.

Аналогично определяются ударные волны с конечным множеством линий разрыва разделяющих область на несколько частей.

Теорема. Функция класса $\tilde{C}^1$ с линией разрыва γ — ударная волна $\Leftrightarrow$ она есть классическое решение уравнения (12) в $\Omega_- \sqcup \gamma$ и $\Omega_+ \sqcup \gamma$, удовлетворяющее на γ *условию Ранкина—Гюгонио*: в любой точке $(x_0, t_0)^\top \in \gamma$

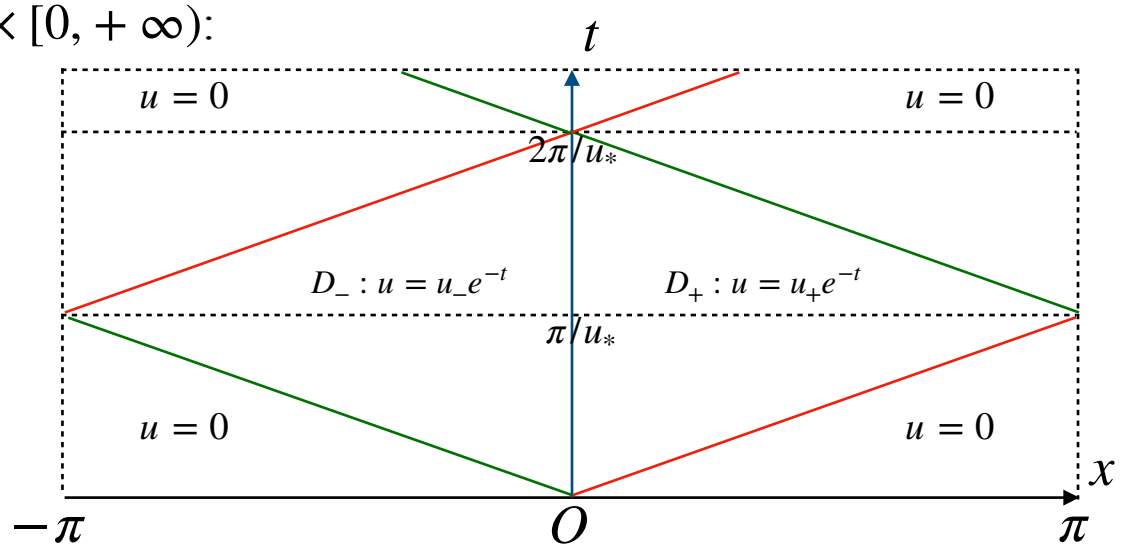
$$\left(u_+ - u_-\right)\nu_t + \left(\cos u_+ - \cos u_-\right)\nu_x = 0, \quad (18)$$

где u_+, u_- — односторонние пределы в точке $(x_0, t_0)^\top \in \gamma$.

7) **Приведём пример ударной волны, служащей нетривиальным обобщёнными решением задачи Коши с нулевой начальной функцией.** В нашем случае также необходимо учесть периодическое условие по x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\cos u) + u = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u(x + 2\pi, t) \equiv u(x, t)\,. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим следующие линии разрыва на цилиндре $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$:



Итак, у нас три линии разрыва на цилиндре $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$:

- синий луч $\{x = 0, t \geqslant 0\}$;
- красная винтовая линия $\{x \equiv u_* t \pmod{2\pi}, t \geqslant 0\}$;
- зелёная винтовая линия $\{x \equiv -u_* t \pmod{2\pi}, t \geqslant 0\}$.

Эти линии разбивают цилиндр на области. В области, примыкающей к нижнему основанию, положим $u = 0$, так как мы должны получить решение задачи (19) с нулевой начальной функцией. В треугольных областях D_+ и D_-, указанных на рис. выше, мы должны задать классические решения уравнения (12). В областях, расположенных выше, можно повторять эти данные — тогда построенная ударная волна будет периодической по t с периодом $\dfrac{2\pi}{u_*}$.

Но какие классические решения брать в областях D_+ и D_-? Самый простой вариант — рассмотреть решения, которые не зависят от x: положим

$$u(x,t) = \begin{cases} u_- e^{-t}, (x,t)^\top \in D_-, \\ u_+ e^{-t}, (x,t)^\top \in D_+ . \end{cases}$$

Проверим условия Ранкина—Гюгонио. На синей линии разрыва (нормаль $\vec{\nu} = \vec{e}_x$) имеем

$$\left(u_+ e^{-t} - u_- e^{-t}\right) \cdot 0 + \left(\cos\left(u_+ e^{-t}\right) - \cos\left(u_- e^{-t}\right)\right) \cdot 1 = 0.$$

Можно положить $u_+ = u_-$ либо $u_+ = -u_-$. Но на красной линии разрыва, где $\vec{\nu} = \vec{e}_x - u_* \vec{e}_t$, всё ломается:

$$-\left(0 - u_+ e^{-t}\right) \cdot u_* + \left(\cos 0 - \cos\left(u_+ e^{-t}\right)\right) \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$u_* = \frac{\cos 0 - \cos\left(u_+ e^{-t}\right)}{0 - u_+ e^{-t}} = \frac{\cos\left(u_+ e^{-t}\right) - 1}{u_+ e^{-t}}.$$

Нетрудно показать, что это равенство выполнено для всех $0 \leqslant t \leqslant \pi/u_*$ тогда и только тогда, когда $u_+ = 0$. Но в этом случае $u_- = 0$ тоже и решение будет тривиальным.

Замечание. С прямолинейными линиями разреза $x = \pm u_* t$ ещё можно искать счастья, если $c(x,t) \equiv 0$. Но при ненулевом коэффициенте c линии, как правило, должны быть искривлены.

Предположим, что первый участок красной линии задан некоторым графиком $x = x_+(t)$. Тогда условие Ранкина—Гюгонио может быть переписано в виде

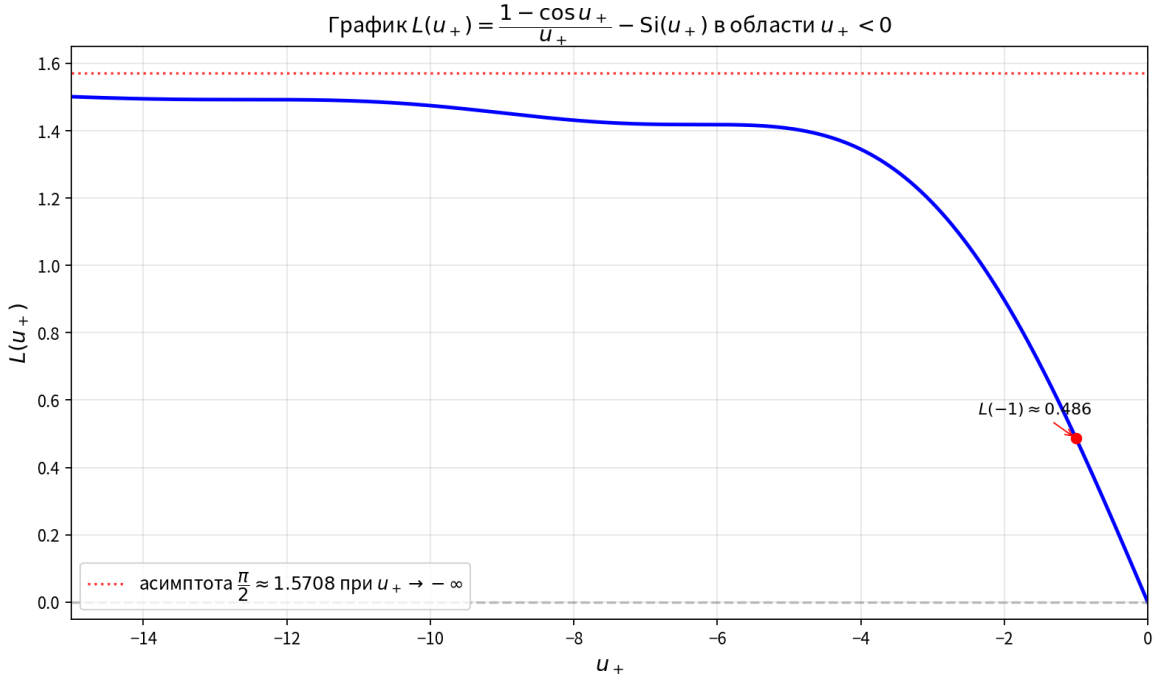
$$x'_+(t) = \frac{\cos 0 - \cos\left(u_+ e^{-t}\right)}{0 - u_+ e^{-t}} = \frac{\cos\left(u_+ e^{-t}\right) - 1}{u_+ e^{-t}}. \quad (20)$$

Проинтегрируем (20), учитывая начальное условие $x_+(0) = 0$:

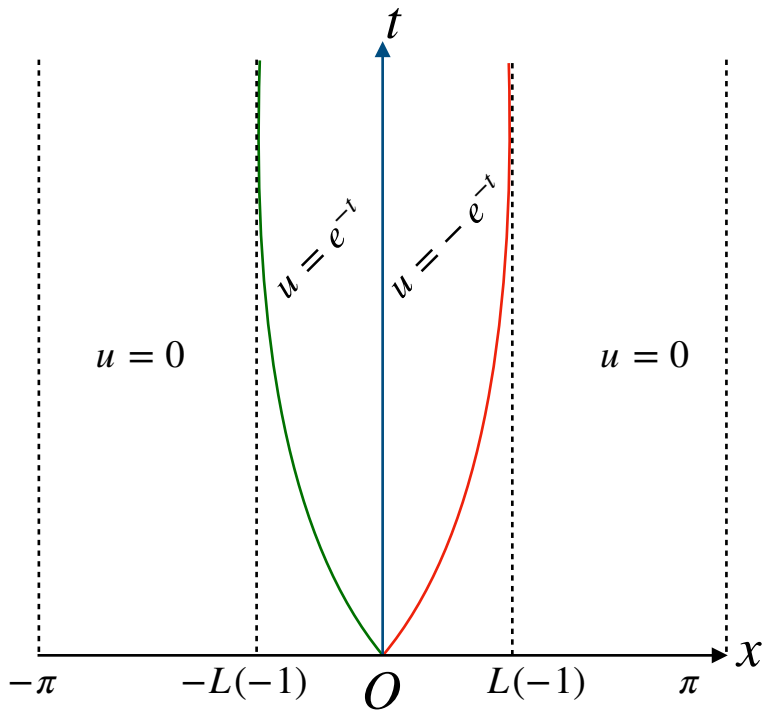
$$x_+(t) = \int_0^t \frac{\cos\left(u_+ e^{-s}\right) - 1}{u_+ e^{-s}} ds =$$

$$= \frac{e^t\left(\cos(u_+ e^{-t}) - 1\right)}{u_+} - \frac{\cos u_+ - 1}{u_+} + \mathrm{Si}(u_+ e^{-t}) - \mathrm{Si}(u_+).$$

Эта функция возрастает, если $u_+ < 0$, и стремится к $L\left(u_+\right) = \dfrac{1 - \cos u_+}{u_+} - \mathrm{Si}\left(u_+\right)$ при $t \to +\infty$. Построим график функции $L = L\left(u_+\right)$ в области $u_+ < 0$. Он показан на рис. ниже. Очевидно, $\lim\limits_{u_+ \to -\infty} L\left(u_+\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, какое бы $u_+ < 0$ мы не задали, красный разрыв никогда не дойдёт до $x = \pi$ — он не дойдёт даже до линии $x = \dfrac{\pi}{2}$.



Теперь предположим, что $u_- = -u_+$ и, следовательно, $u_- > 0$, а зелёная линия разрыва пусть будет противоположна красной: $x_-(t) = -x_+(t)$. Тогда из (20) мы получим условие Ранкина—Гюгонио на зелёном разрыве:

$$x'_-(t) = -x'_+(t) = \frac{\cos\left(u_+ e^{-t}\right) - 1}{-u_+ e^{-t}} = \frac{\cos\left(u_- e^{-t}\right) - 1}{u_- e^{-t}} = \frac{\cos 0 - \cos\left(u_- e^{-t}\right)}{0 - u_- e^{-t}}.$$

На рис. справа показано итоговое разбиение цилиндра $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$ на <u>три</u> области с помощью трёх линий разреза, а также значение решение в каждой области. Нетривиальное обобщённое решение задачи Коши (19) построено!