

ДОМ. ЗАДАНИЕ #1

по «Уравнениям в частных производных»

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = -c(x, y)u + f(x, y), \\ u|_{\gamma} = \varphi, \end{cases}$$

где a, b, c и f — известные гладкие функции в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \subset D$ — гладкая начальная кривая, $\varphi \in C^\infty(\gamma)$ — начальная функция. Требуется:

- 1) записать систему характеристик в нормальной и симметрической формах Коши;
- 2) проверить условие трансверсальности на всей начальной кривой γ ;
- 3) найти общее решение и/или получить два независимых (в окрестности кривой γ , если это возможно) первых интеграла системы характеристик;
- 4) получить общее решение уравнения в параметрическом виде и/или разрешить относительно u связку двух найденных первых интегралов;
- 5) найти решение задачи Коши в явном виде для конкретной начальной функции φ , указанной в варианте;
- 6) построить на компьютере или рукой на листочке область существования единственного решения задачи Коши для всей начальной кривой и для указанного в варианте участка γ .

Пример. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + (y - x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 2xu, \\ u = \varphi(x), y = x^2 + 2x, -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Далее положим $\varphi(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$.

1) Запишем систему характеристик в нормальной и симметрической формах Коши:

- нормальная форма (точка — производная по фазовому времени t):

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = y - x^2, \\ \dot{u} = 2ux. \end{cases} \quad (1)$$

Векторное поле $\vec{a}$ имеет вид

$$\vec{a} = \vec{e}_x + (y - x^2) \vec{e}_y.$$

- симметрическая форма:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y - x^2} = \frac{du}{2xu}. \quad (2)$$

2) Проверим условие трансверсальности для начальной кривой $\gamma = \{y = x^2\}$. Параметризуем γ :

$$\begin{cases} x = p, \\ y = p^2 + 2p, \\ -\infty < p < +\infty. \end{cases} \quad (3)$$

Вычислим касательный вектор:

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{dp} \vec{e}_x + \frac{dy}{dp} \vec{e}_y = \vec{e}_x + (2p + 2) \vec{e}_y. \text{ Векторное поле } \vec{a} \text{ на}$$

начальной кривой представляет собой $\vec{a} \Big|_{\gamma} = \vec{e}_x + 2p \vec{e}_y$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{\tau}$ линейно независимы при всех p , так как

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2p+2 \\ 1 & 2p \end{pmatrix} = 2.$$

Условие трансверсальности выполнено во всех точках начальной кривой γ .

3) Найдём общее решение системы характеристик. Первое уравнение системы (1) немедленно интегрируется: $x = t + x_0$. Второе уравнение системы имеет после подстановки имеет вид линейного уравнения: $\dot{y} = y - (t + x_0)^2$. Его общее решение: $y = Ce^t + (t + x_0 + 1)^2 + 1$. Если $t = 0$, то $y_0 = C + x_0^2 + 2x_0 + 2$, откуда $C = y_0 - x_0^2 - 2x_0 - 2$. Итак,

$$y = (y_0 - x_0^2 - 2x_0 - 2) e^t + (t + x_0 + 1)^2 + 1.$$

Третье уравнение системы (1) после подстановки решения первого уравнения принимает вид $\dot{u} = 2(t + x_0)u$. После разделения переменных и потенцирования получим общее решение: $u = u_0 e^{(t+x_0)^2 - x_0^2} = u_0 e^{t^2 + 2x_0 t}$.

Итак, общее решение системы (1):

$$\begin{cases} x = t + x_0, \\ y = (y_0 - x_0^2 - 2x_0 - 2) e^t + (t + x_0 + 1)^2 + 1, \\ u = u_0 e^{t^2 + 2x_0 t}. \end{cases} \quad (4)$$

3') Найдём два независимых интеграла системы характеристик (2). Из симметрической формы Коши (2) имеем, во-первых, $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y - x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y - x^2$ — линейное уравнение, общее решение которого есть

$$y = Ce^x + x^2 + 2x + 2.$$

Выражая отсюда константу C , получим один из первых интегралов:

$$I(x, y, u) = (y - x^2 - 2x - 2) e^{-x} = \text{const.}$$

Другой первый интеграл получается так:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1} &= \frac{du}{2xu} \Leftrightarrow \frac{du}{u} = 2xdx \Leftrightarrow d(\ln|u| - x^2) = 0 \Leftrightarrow \\ \ln|u| - x^2 &= \text{const} \Leftrightarrow J(x, y, u) = ue^{-x^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Проверим независимость найденных интегралов:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_x & I_y & I_u \\ J_x & J_y & J_u \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} I_x & e^{-x} & 0 \\ J_x & 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix} = 2.$$

4) Получим общее решение уравнения в параметрическом виде и разрешим относительно u связку двух найденных первых интегралов. Подставим в (4) параметризацию начальной кривой (3), заменяя в ней x, y на x_0, y_0 , а вместо u_0 подставим $\varphi(x_0) = \varphi(p)$:

$$\begin{cases} x = t + p, \\ y = -2e^t + (t + p + 1)^2 + 1, \\ u = \varphi(p)e^{t^2+2pt}, \\ -\infty < p < \infty, -\infty < t < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Исключим параметры. Из первого уравнения системы (5) $p = x - t$. Подстановка во второе уравнение даёт

$$y = -2e^t + (x + 1)^2 + 1,$$

откуда $t = \ln \frac{x^2 + 2x + 2 - y}{2} = \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right)$. Тогда

подстановка в третье уравнение системы (5) приводит нас к явному решению:

$$u = \varphi \left(x - \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right) \right) \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right)^{\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} - x^2 - 1}.$$

Теперь воспользуемся первыми интегралами. Разрешим нелинейную связку

$$\Psi \left(u e^{-x^2}, (y - x^2 - 2x - 2) e^{-x} \right) = 0$$

относительно u :

$$u = e^{x^2} \psi \left((y - x^2 - 2x - 2) e^{-x} \right).$$

Подставим в начальное условие задачи Коши:

$$e^{x^2} \psi \left(-2e^{-x} \right) = \varphi(x). \quad (7)$$

Обозначим $\xi = -2e^{-x}$, $x = -\ln \left(-\frac{\xi}{2} \right)$. Тогда из уравнения

$$(7) \quad \psi(\xi) = e^{-x^2} \varphi(x) = \exp \left(-\ln^2 \left(-\frac{\xi}{2} \right) \right) \varphi \left(-\ln \left(-\frac{\xi}{2} \right) \right).$$

Итак, имеем решение задачи Коши в явном виде:

$$u = e^{x^2} \exp \left(-\ln^2 \left(\left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right) e^{-x} \right) \right).$$

$$\varphi \left(-\ln \left(\left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right) e^{-x} \right) \right) = \exp \left[x^2 - \left(\ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right) - x \right)^2 \right].$$

$$\varphi \left(x - \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right) \right) = \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right)^{\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} - x^2 - 1} \varphi \left(x - \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right) \right).$$

5) Найдём решение задачи Коши в явном виде для конкретной начальной функции. Для функции $\varphi(x) = x$ решение задачи Коши предстаёт в виде

$$u = \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right)^{\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} - x^2 - 1} \left(x - \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right) \right).$$

Из этого формулы непосредственно следует, что область определения решения задаётся неравенством

$$\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} > 0 \Leftrightarrow y < x^2 + 2x + 2, \quad (8)$$

т.е. она находится ниже параболы $y = x^2 + 2x + 2$. В частности, начальная кривая $\gamma = \{y = x^2 + 2x\}$ принадлежит этой области.

б) Построим область существования единственного решения задачи Коши для всей начальной кривой и для указанного в варианте участка γ . Для этого через точки начальной кривой следует провести характеристики. Каждая характеристика принадлежит линии уровня интеграла

$$I(x, y, u) = (y - x^2 - 2x - 2) e^{-x} = \text{const.}$$

Подставим параметризацию (3) в константу этого интеграла:

$$(y - x^2 - 2x - 2) e^{-x} = -2e^{-p} \Rightarrow$$

$$y = x^2 + 2x + 2 - 2e^{x-p}. \quad (9)$$

Очевидно, что из равенства (9) следует неравенство (8).

Наоборот, если точка $(x; y)$ удовлетворяет неравенству (8), то найдётся такое $p \in (-\infty, +\infty)$, что с ним справедливо равенство (9): оно вычисляется по формуле

$$p = x - \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \frac{y}{2} \right).$$

Таким образом, максимальная область существования единственного решения задачи Коши задаётся неравенством (8). Для указанного в варианте участка начальной кривой γ параметр $p \in [0, 1]$; крайние значения дают проекции характеристик

$$y = x^2 + 2x + 2 - 2e^x, \quad y = x^2 + 2x + 2 - 2e^{x-1}.$$

Область существования и единственности для дуги γ задаётся двойным неравенством

$$-2e^x < y - x^2 - 2x - 2 < -2e^{x-1}. \quad (10)$$

На рис. ниже **красным** цветом отмечена начальная парабола $\gamma = \{y = x^2 + 2x\}$. Пунктирная **фиолетовая** линия — граница области (8) существования единственного решения задачи Коши. **Синим** цветом отмечены проекции

характеристик, составляющие область (10) (прерывистые линии) и служащие её границей (сплошные линии).

