Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка

1. Линейные уравнения второго порядка с постоянными старшими коэффициентами

Задача 2.1. Определить тип а) уравнения Лапласа $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0$; б) волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0$; в) уравнения Трикоми $xu_{yy} - u_{xx} = 0$; г) уравнения теплопроводности $-u_{xx} + u_t = 0$.

Решение. а) Матрица коэффициентов старшей части есть единичная матрица, $n_+ = n$, поэтому уравнение Лапласа имеет эллиптический тип.

б) Матрица коэффициентов старшей части имеет диагональный вид $\mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}$, следовательно $n_+ = 1$, $n_- = 3$, $n = 4$, и волновое уравнение имеет гиперболический тип.

в) Матрица коэффициентов старшей части есть $\mathrm{diag}\{-1,x\}$, откуда следует, что при $x > 0$ уравнение Трикоми имеет гиперболический тип ($n_+ = 1, n_- = 1$), при $x < 0$ ($n_- = 2$) — эллиптический тип, а если $x = 0$ ($n_0 = 1, n_- = 1$), то уравнение Трикоми имеет параболический тип (в этом примере мы встретились с уравнением *смешанного типа*, чей тип зависит от точки области);

г) матрица коэффициентов старшей части есть $\mathrm{diag}\{0,-1\}$ ($n_+ = 0, n_- = 1, n_0 = 1$), так что уравнение теплопроводности имеет параболический тип.

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Дано: полулинейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в старшей части

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\nabla u, u, x) = 0.$$

Требуется: определить тип и привести уравнение к каноническому виду.

1. Записать главный символ оператора уравнения — квадратичную форму $\mathcal{Q}(\xi) = \xi^T A \xi$.
2. Методом Лагранжа найти преобразование $\eta = P\xi$, приводящее квадратичную форму $\mathcal{Q}$ к каноническому виду $\mathcal{Q}(\eta) = \sigma_1\eta_1^2 + \ldots + \sigma_n\eta_n^2$, где $\sigma_i \in \{1,-1,0\}$; определить тип уравнения.
3. Сделать замену переменных $y = P^{-T}x$ и записать канонический вид

$$\sigma_1\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\ldots+\sigma_n\frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}+F\left(P^{-1}\nabla_y u,u,P^T y\right)=0.$$

Задача 2.2. Определить тип и привести уравнение к каноническому виду:

$$u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0.$$

Решение. Рассмотрим главный символ оператора (с соответствием $x\leftrightarrow\xi$, $y\leftrightarrow\eta$, $z\leftrightarrow\zeta$) и матрицу коэффициентов старшей части (она же матрица главного символа):

$$\mathcal{Q}(\xi,\eta,\zeta)=\underline{\xi^2}+\underline{2\xi\eta}-\underline{2\xi\zeta}+2\eta^2+6\zeta^2,$$

$$A'=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&6\end{pmatrix}.$$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+ac+bc\right)$

$(\xi+\eta-\zeta)^2=\xi^2+2\xi\eta-2\xi\zeta-2\eta\zeta+\eta^2+\zeta^2$

Приведём главный символ к каноническому виду методом Лагранжа. Имеем

$$\mathcal{Q}(\xi,\eta,\zeta)=\left(\xi^2+2\xi\eta-2\xi\zeta-2\eta\zeta+\eta^2+\zeta^2\right)+2\eta\zeta+\eta^2+5\zeta^2=$$

$$=\left(\xi+\eta-\zeta\right)^2+\underline{2\eta\zeta}+\underline{\eta^2}+5\zeta^2=\left(\xi+\eta-\zeta\right)^2+\left(\eta^2+2\eta\zeta+\zeta^2\right)+4\zeta^2=$$

$$=\overline{(\xi+\eta-\zeta)^2}+(\eta+\zeta)^2+(2\zeta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Отсюда $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=1$ (знаки собственных значений главного символа), следовательно уравнение (1.8) имеет эллиптический тип. Замена, приводящая квадратичную форму к каноническому виду, есть

$$\begin{cases}\alpha=\xi+\eta-\zeta,\\ \beta=\eta+\zeta,\\ \gamma=2\zeta;\end{cases}\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\text{ — матрица замены, }P^{-T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$P^{\top}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}.\ \begin{cases}\alpha=\xi+\eta-\zeta,\\ \beta=\eta+\zeta,\\ \gamma=2\zeta;\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}\xi=\alpha-\beta+\gamma,\\ \eta=\beta-\dfrac{\gamma}{2},\\ \zeta=\dfrac{\gamma}{2};\end{cases}\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Таким образом, замена, приводящая уравнение к каноническому виду, представляет собой

$$p=x,\ q=-x+y,\ r=x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z.$$

Сам канонический вид уравнения можно восстановить по знакам собственных значений главного символа:

$$u_{pp}+u_{qq}+u_{rr}=0.$$

Получилось $3D$ уравнение Лапласа.

Задача 2.3. Определить тип и привести уравнение к каноническому виду:

$$u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0.$$

Решение. Главный символ и матрица коэффициентов старшей части имеют вид

$$\mathcal{Q}(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta-\xi\zeta, A=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(выдержано соответствие $x\leftrightarrow\xi$, $y\leftrightarrow\eta$, $z\leftrightarrow\zeta$). Проблема: в квадратичной форме нет квадратов переменных, поэтому метод Лагранжа без дополнительных замен не работает. Чтобы исправить ситуацию, сделаем специальную замену $\xi=\mu+\nu, \eta=\mu-\nu$. Тогда

$$\mathcal{Q}=(\mu+\nu)(\mu-\nu)-(\mu+\nu)\zeta=\mu^2-\nu^2-\mu\zeta-\nu\zeta=\left(\mu-\frac{1}{2}\zeta\right)^2-\nu^2-\nu\zeta-\frac{1}{4}\zeta^2=$$

$$=\left(\mu-\frac{1}{2}\zeta\right)^2-\left(\nu+\frac{1}{2}\zeta\right)^2=\alpha^2-\beta^2+0\cdot\gamma^2,$$

где $\alpha=\mu-\frac{1}{2}\zeta, \beta=\nu+\frac{1}{2}\zeta$. Поскольку знаки собственных значений главного символа есть $\sigma_1=1$, $\sigma_2=-1$, $\sigma_3=0$, то, формально говоря, имеем вырожденный тип. Положим $\gamma=\frac{1}{2}\zeta$ и, учитывая обратную зависимость $\mu=\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\eta, \nu=\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{2}\eta$, получим замену, приводящую главный символ к каноническому виду:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{2}\zeta,\\ \beta=\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{2}\zeta,\\ \gamma=\frac{1}{2}\zeta;\end{cases} P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, P^{-T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Замена, приводящая уравнение к каноническому виду, есть

$$p=x+y, q=x-y, r=2y+2z.$$

Имеем (по цепному правилу) $u_x=u_pp_x+u_qq_x+u_rr_x=u_p+u_q$, $u_y=u_p-u_q+2u_r, u_z=2u_r$. Получим канонический вид уравнения:

$$u_{pp}-u_{qq}+u_p+u_q+u_p-u_q+2u_r-2u_r=0$$

или

$$u_{pp}-u_{qq}+2u_p=0.$$

В этом уравнении переменная r оказалась фиктивной в том смысле, что относительно неё нет производных. Поэтому уравнение имеет гиперболический тип как двухмерное.

Можно сделать замену неизвестной функции, уничтожающую первые производные в полученном каноническом виде. Действительно, пусть $u=e^{\alpha p}v$, где $\alpha=\text{const}$, v — новая неизвестная функция. Тогда $u_p=e^{\alpha p}v_p+\alpha e^{\alpha p}v$, $u_{qq}=e^{\alpha p}v_{qq}, u_{pp}=e^{\alpha p}v_{pp}+2\alpha e^{\alpha p}v_p+\alpha^2e^{\alpha p}v$. Подстановка этих выражений и сокращение на $e^{\alpha p}$ преобразует уравнение следующим образом:

$$v_{pp} - v_{qq} + (2\alpha + 2)v_p + \left(\alpha^2 + 2\alpha\right) v = 0.$$

Положим $\alpha = -1$, тогда уравнение принимает вид, свободный от производных первого порядка:

$v_{pp} - v_{qq} - v = 0$ — уравнение Клейна—Гордона.

Задача 2.4. Привести уравнение к каноническому виду:

$$u_{xx} + 2u_{yy} + 2u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{yz} - 2u_{zt} = 0.$$

Решение. Главный символ зависит от четырёх переменных и имеет вид

$$\mathcal{Q} = \underline{\xi^2} + 2\eta^2 + 2\zeta^2 - \underline{2\xi\eta} - 2\eta\zeta - 2\zeta\tau,$$

где соблюдено соответствие $x \leftrightarrow \xi, y \leftrightarrow \eta, z \leftrightarrow \zeta, t \leftrightarrow \tau$.

Найдём замену, приводящую квадратичную форму (5) к каноническому виду, методом Лагранжа:

$$\mathcal{Q} = (\xi - \eta)^2 + \underline{\eta^2} + 2\zeta^2 - \underline{2\eta\zeta} - 2\zeta\tau = (\xi - \eta)^2 + (\eta - \zeta)^2 + \zeta^2 - 2\zeta\tau + \tau^2 - \tau^2 =$$

$$= (\xi - \eta)^2 + (\eta - \zeta)^2 + (\zeta - \tau)^2 - \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2.$$

Искомая замена имеет вид

$$\begin{cases} \alpha = \xi - \eta, \\ \beta = \eta - \zeta, \\ \gamma = \zeta - \tau, \\ \delta = \tau, \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1, \sigma_4 = -1$ — знаки собственных значений главного символа, P — матрица замены. Уравнение имеет гиперболический тип. Обратим матрицу P методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, замена

$$\begin{cases} p = x, \\ q = x + y, \\ r = x + y + z, \\ s = x + y + z + t, \end{cases} \qquad P^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

приводит уравнение к каноническому виду

$$u_{pp} + u_{qq} + u_{rr} - u_{ss} = 0.$$

Получилось волновое уравнение с тремя пространственными переменными p, q, r и s — переменной времени.