ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = -c(x,y)u + f(x,y), \\ u\big|_{\gamma} = \varphi, \end{cases}$$

где a, b, c и f — известные гладкие функции в области $D \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \subset D$ — гладкая начальная кривая, $\varphi \in C^\infty(\gamma)$ — начальная функция. Требуется:

1) записать систему характеристик в нормальной и симметрической формах Коши;
2) проверить условие трансверсальности на всей начальной кривой γ;
3) найти общее решение и/или получить два независимых (в окрестности кривой γ, если это возможно) первых интеграла системы характеристик;
4) получить общее решение уравнения в параметрическом виде и/или разрешить относительно u связку двух найденных первых интегралов;
5) найти решение задачи Коши в явном виде для конкретной начальной функции φ, указанной в варианте;
6) построить на компьютере или рукой на листочке область существования единственного решения задачи Коши для всей начальной кривой и для указанного в варианте участка γ.

Ресурсы для решения дом. задания #1

1. Пример решения задания #1 (скоро; пока см. пример 8.4 в https://baikov.org/pdebook8s12).
2. А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин. Уравнения с частными производными первого порядка: учебное пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999: http://new.math.msu.su/diffur/pde-first.pdf
3. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
4. Evans, L.C. Partial Differential Equations. Second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010 (chapters 3, 7).

Номер варианта студента/студентки равен номеру в списке его группы. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой и сдаётся преподавателю на лекциях/практических занятиях. Кроме того, скан/фото листочков с решением можно высылать на alexander@baikov.org или отправлять в LMS на странице курса, применяя соответствующий функционал. Необходимо сделать все пункты задания! Не исключена защита работ (о ней будет объявлено заранее). Дедлайн для всех групп — **17.10.26, 23:59.**

Список вариантов

Вариант 1

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y, \\ u = \varphi(x), y = 1 - x;\ \varphi(x) = \sin x;\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = yu, \\ u = \varphi(x), y = x^2, x > 0; \varphi(x) = 1;\ 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} e^x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = ye^x, \\ u = \varphi(y), x = 0;\ \varphi(y) = y; -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = x^2y, \\ u = \varphi(y), x = 2; \varphi(y) = \cos y; -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(2e^x - y\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u = \varphi(y), x = 0;\ \varphi(y) = y;\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases} 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - x)\dfrac{\partial u}{\partial y} - x^2 = 0, \\ u = \varphi(y), x = 1; \varphi(y) = \dfrac{1}{y^2 + 1};\ 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases} (x + y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x - y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u = \varphi(y), x = 0, y > 0;\ \varphi(y) = 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy, \\ u = \varphi(x), y = 1;\ \varphi(x) = x; -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3u, \\ u = \varphi(x), y = \dfrac{1}{x}, x > 0;\ \varphi(x) = 1;\ 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y + u, \\ u = \varphi(x), y = x + 1;\ \varphi(x) = 2x + 1; -1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 11

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2, \\ u = \varphi(x), y = -2;\ \varphi(x) = x - x^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 12

$$\begin{cases} y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = x(u - 2y), \\ u = \varphi(x), y = x, x > 0; \varphi(x) = \ln x;\ 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 13

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = (x + y)u, \\ u = \varphi(y), x = 1; \varphi(y) = \sin y; 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 14

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = y - x, \\ u = \varphi(y), x = 1 - y;\ \varphi(y) = \cos y;\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 15

$$\begin{cases} y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy = 0, \\ u = \varphi(y), x = y^2, y > 0; \varphi(y) = 1;\ 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 16

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + e^y\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0, \\ u = \varphi(x), y = 0;\ \varphi(x) = x; -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 17

$$\begin{cases} (x-y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} - y^2 = 0, \\ u = \varphi(x), y = 1; \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1};\ 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 18

$$\begin{cases} (y-x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u = \varphi(x), y = 0, x > 0;\ \varphi(x) = 1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 19

$$\begin{cases} 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = xy, \\ u = \varphi(y), x = 1;\ \varphi(y) = y; -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 20

$$\begin{cases} xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = y^3u, \\ u = \varphi(y), x = \dfrac{1}{y}, y > 0;\ \varphi(y) = 1;\ 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 21

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y - u, \\ u = \varphi(y), x = y + 1;\ \varphi(y) = 2y + 1; -1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 22

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = -x^2 - y^2, \\ u = \varphi(y), x = -2;\ \varphi(y) = y - y^2;\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 23

$$\begin{cases} xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + yu = 2xy \\ u = \varphi(y), x = y, y > 0; \varphi(y) = \ln y;\ 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Вариант 24

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x+y)u = 0, \\ u = \varphi(x), y = 1; \varphi(x) = \sin x; 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 25

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2, \\ u = \varphi(x), y = 1;\ \varphi(x) = x;\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 26

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - xy, \\ u = \varphi(y), x = 2;\ \varphi(y) = y^2; -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$