

Уравнения первого порядка

Задача 1.4. Исследовать задачу Коши для квазилинейного уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + (u - x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \\ u = x^2 + x, y = 2x^2. \end{cases}$$

1) Запишем систему характеристик в нормальной форме Коши и в симметрической форме Коши:

- нормальная форма (точка — производная по фазовому времени t):

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = u - x^2, \\ \dot{u} = 2x \end{cases} \quad (1)$$

(характеристическое векторное поле имеет вид

$$\vec{c} = \vec{e}_x + (u - x^2) \vec{e}_y + 2x \vec{e}_z);$$

- симметрическая форма:

$$dt = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{u - x^2} = \frac{du}{2x}. \quad (2)$$

2) Найдём общее решение системы характеристик. Первое уравнение системы (1) немедленно интегрируется: $x = t + x_0$. Третье уравнение системы тогда имеет вид $\dot{u} = 2(t + x_0)$, а его общее решение есть $u = t^2 + 2tx_0 + u_0$. Наконец, второе уравнение $\dot{y} = u_0 - x_0^2$ имеет общее решение $y = (u_0 - x_0^2)t + y_0$. Таким образом, общее решение системы (1) представляет собой

$$\begin{cases} x = t + x_0, \\ y = (u_0 - x_0^2)t + y_0, \\ u = t^2 + 2tx_0 + u_0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $u_0 = u(0)$ — координаты начальной точки.

3) Получим два независимых интеграла системы

характеристик в окрестности графика начальной функции

$$\Gamma = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : u = x^2 + x, y = 2x^2, -\infty < x < +\infty\}.$$

Из уравнения $\frac{dx}{1} = \frac{du}{2x}$ следует, что $du - 2x dx = 0$, откуда

$u - x^2 = C_1$. Понижая порядок системы с помощью этого

интеграла, имеем $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{C_1} \Leftrightarrow dy - C_1 dx = 0 \Leftrightarrow y - C_1 x = C_2$

или $y - ux + x^3 = C_2$. Итак, $I(x, y, u) = u - x^2$,

$J(x, y, u) = y - ux + x^3$. Проверим независимость функций I и J , вычислив ранг матрицы Якоби:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} & \frac{\partial I}{\partial y} & \frac{\partial I}{\partial u} \\ \frac{\partial J}{\partial x} & \frac{\partial J}{\partial y} & \frac{\partial J}{\partial u} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} -2x & 0 & 1 \\ 3x^2 - u & 1 & -x \end{pmatrix} = 2.$$

Предъявим общее решения квазилинейного уравнения в неявном виде с указанием условий на произвольную функцию Φ . Пусть $(x_0, y_0, u_0)^T \in \mathbb{R}^3$ — точка, в окрестностях которой необходимо получить общее решение уравнения. В силу независимости полученных интегралов общее решение имеет неявный вид

$$\Phi(u - x^2, y - ux + x^3) = 0. \quad (4)$$

Условие на функцию $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, гарантирующие разрешимость уравнения (4), следует из теоремы о неявной функции:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I} - x \frac{\partial \Phi}{\partial J} \bigg|_{(x_0, y_0, u_0)} \neq 0.$$

4) Проверим условие трансверсальности задачи Коши на кривой Γ . Для этого введём параметрическое представление Γ :

$$\begin{cases} x_0 = q, \\ y_0 = 2q^2, \\ u_0 = q^2 + q, \\ -\infty < q < +\infty. \end{cases} \quad (5)$$

Условие трансверсальности заключается в том, 1) что характеристический вектор на кривой Γ $\vec{c} = \vec{e}_x + q\vec{e}_y + 2q\vec{e}_u$ и касательный вектор $\vec{\tau} = \vec{e}_x + 4q\vec{e}_y + (2q + 1)\vec{e}_u$ к кривой Γ не должны быть коллинеарными. Поскольку

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & q & 2q \\ 1 & 4q & 2q + 1 \end{pmatrix} = 2$$

условие трансверсальности выполнено, гладкая интегральная поверхность существует в окрестности каждой точки кривой Γ . 2) Плоскость $\text{Lin}(\vec{c}, \vec{\tau})$ не является вертикальной $\Leftrightarrow$ третья координата $\vec{\nu} = [\vec{c}, \vec{\tau}]$ не равна нулю:

$$\vec{\nu} = [\vec{c}, \vec{\tau}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_u \\ 1 & q & 2q \\ 1 & 4q & 2q + 1 \end{vmatrix} = \dots + 3q\vec{e}_u.$$

Так как минор $M_{1,2}^{1,2} = 3q$ приведённой выше матрицы не равен нулю при $q \neq 0$, то условие трансверсальности выполнено для $\Gamma_+ = \{(x, y, u) \in \Gamma : q > 0\}$ и $\Gamma_- = \{(x, y, u) \in \Gamma : q < 0\}$.

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности каждой точки, принадлежащей начальной кривой

$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x^2, -1 < x < 0\}$ — проекция дуги

$$\tilde{\Gamma}_- = \{(x, y, u) \in \Gamma : -1 < q < 0\}.$$

5) Получим характеристическую поверхность задачи Коши в неявном виде, в параметрическом виде,

визуализируем её. Для получения неявного уравнения подставим в общее решение (4) $\Phi(u - x^2, y - ux + x^3) = 0$

начальное условие $y = 2x^2$, $u = x^2 + x$: $\Phi(x, x^2) = 0$ для всех $x \in (-1, 0)$. Отсюда $\Phi(I, J) = J - I^2$. Тогда неявное уравнение для характеристической поверхности есть

$$y - ux + x^3 - (u - x^2)^2 = 0 \text{ или} \\ u^2 + (x - 2x^2)u + x^4 - x^3 - y = 0. \quad (6)$$

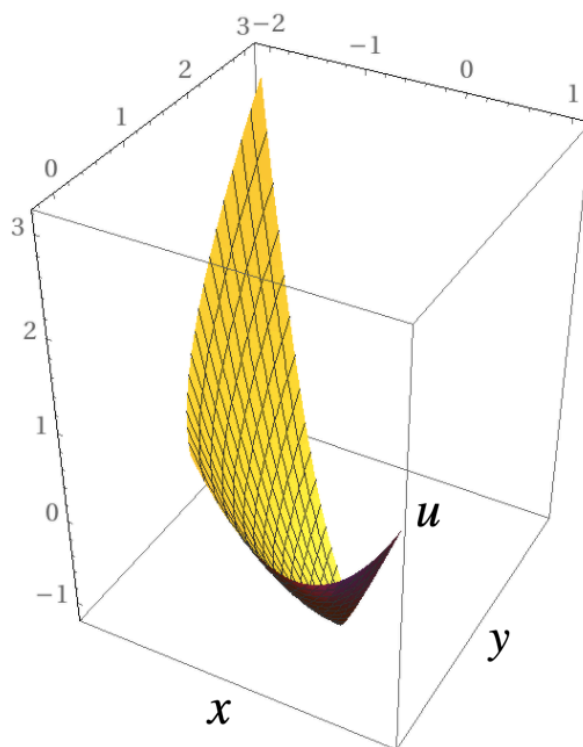
Уравнение (6) легко разрешить относительно u (как квадратное), однако мы не будем этого делать. Для того, чтобы получить параметрическое представление характеристической поверхности, подставим в общее решение (3) $x_0 = q$, $y_0 = 2q^2$ и $u_0 = q^2 + q$:

$$\begin{cases} x = t + q, \\ y = qt + 2q^2, \\ u = t^2 + 2tq + q^2 + q. \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что параметр $q \in (-1, 0)$, а параметр $t \in (-\infty, \infty)$, если речь идёт о всей характеристической поверхности, а не только о той её части, которая соответствует классическому решению задачи Коши (см. далее). Для визуализации поверхности (7) воспользуемся <https://www.wolframalpha.com>. В ответ на команду

*3d parametric plot (t+q,
q*t+2*q^2,
t^2+2*t*q+q^2+q), t=-1 to 1, q=-1 to 0*

получим визуализацию характеристической поверхности. Замечание: лучше взять небольшой интервал изменения параметра t , например, $t \in (-1, 1)$.



б) Исследуем и визуализируем складки характеристической поверхности при проектировании на плоскость переменных (x, y) , построим максимальную область существования единственного классического решения задачи Коши — однозначную проекцию характеристической поверхности на плоскость переменных (x, y) .

Рассмотрим отображение проектирования характеристической поверхности S , заданной формулами (7), на плоскость независимых переменных (x, y) . Если $t = 0$, то имеем однозначную проекцию части кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ на плоскость (x, y) , которая даёт кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$. Необходимо найти максимальный кусок поверхности S , который содержит часть Γ и однозначно проектируется на плоскость (x, y) .

Дифференциал отображения проекции есть линейный оператор между касательной плоскостью к S и плоскостью (x, y) . Касательная плоскость к S в точке, задаваемой параметрами (q, t) , есть линейная оболочка касательных векторов

$$\vec{\xi} = \frac{\partial x}{\partial q} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial q} \vec{e}_u = \vec{e}_x + (t + 4q) \vec{e}_y + (2t + 2q + 1) \vec{e}_u$$

$$\text{и } \vec{\eta} = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial t} \vec{e}_u = \vec{e}_x + q \vec{e}_y + (2t + 2q) \vec{e}_u.$$

Отметим, во-первых, что векторы $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ линейно независимы для любых (q, t) . Действительно, рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & t + 4q & 2t + 2q + 1 \\ 1 & q & 2t + 2q \end{pmatrix}.$$

Минор $M_{1,2}^{1,2} = -t - 3q \neq 0$, если $t \neq -3q$. Если же $t = -3q$, то

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & q & -4q + 1 \\ 1 & q & -4q \end{pmatrix} \neq 0,$$

потому что $M_{1,2}^{1,3} = -1$ для любых q . Это означает, что поверхность S гладкая (бесконечно дифференцируемая, аналитическая и даже алгебраическая), у неё нет особых точек.

Однако дифференциал отображения проектирования $\text{proj} : S \rightarrow \mathbb{R}_{x,y}^2$ не всегда является линейным изоморфизмом. Найдём те точки поверхности, для которых $\text{Ker } d(\text{proj}) \neq 0$. Они соответствуют таким значениям параметров (q, t) , при которых $M_{1,2}^{1,2} = -t - 3q = 0$. Дадим геометрическую трактовку этого факта. Нетривиальность ядра дифференциала отображения проектирования эквивалентна вертикальности касательной плоскости $\text{Lin}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \Leftrightarrow$ третья координата векторного произведения

$$[\vec{\xi}, \vec{\eta}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_u \\ 1 & t + 4q & 2t + 2q + 1 \\ 1 & q & 2t + 2q \end{vmatrix}$$

равна нулю или $M_{1,2}^{1,2} = -t - 3q = 0 \Leftrightarrow t = -3q$.

Великий американский математик Хасслер Уитни (1907–1989) дал классификацию особенностей бесконечно дифференцируемых отображений двумерных гладких многообразий. Следуя ему, будем называть множество точек поверхности S с $\text{Ker } d(\text{proj}) \neq 0$, *кривой складок*. В нашем случае кривая складок $F \subset S$ имеет параметризацию

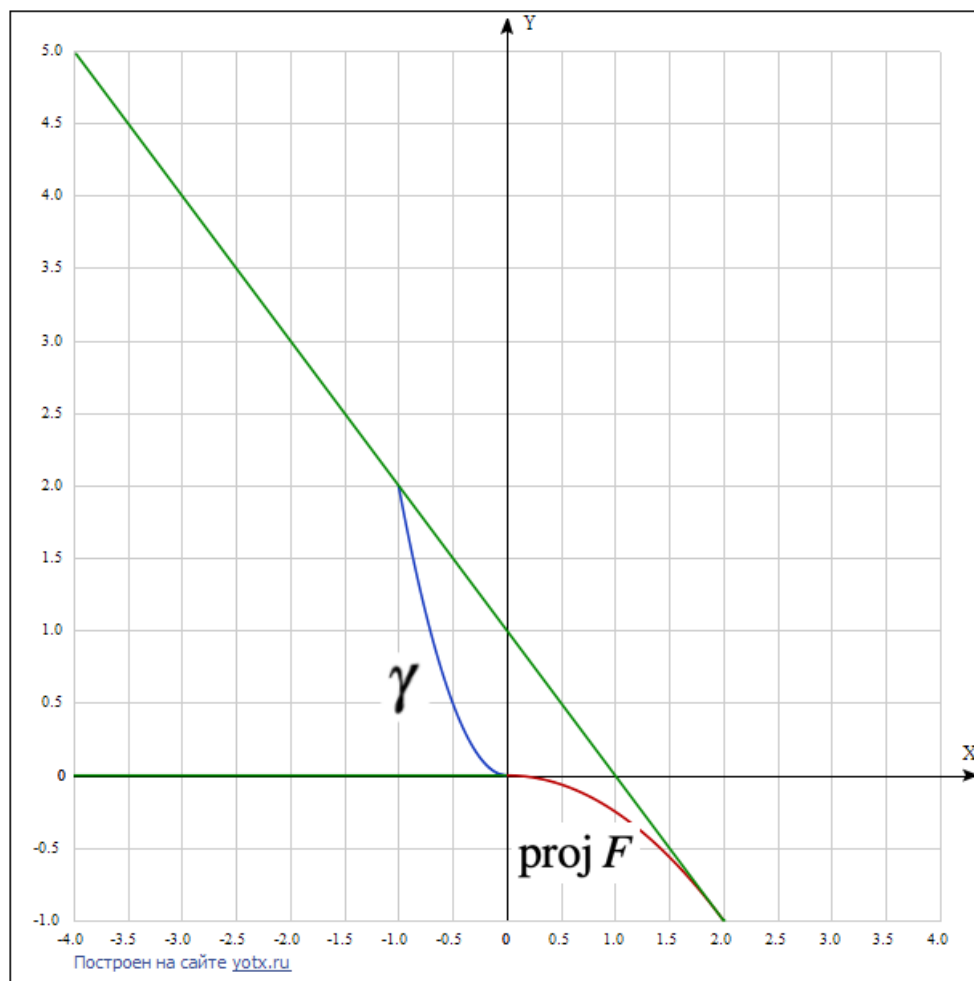
$$x = -2q, y = -q^2, u = 4q^2 + q, q \in (-1, 0).$$

Построим на плоскости (x, y) проекцию кривой складок $\text{proj } F = \{x = -2q, y = -q^2, -1 < q < 0\}$ вместе с начальной кривой $\gamma = \{x = q, y = 2q^2, -1 < q < 0\}$.

Осуществим это построение с помощью сервиса <https://yotx.ru>. На следующем рисунке синим цветом изображена начальная кривая γ , красным — кривая складок $\text{proj } F$.

Максимальная область существования единственного

классического решения задачи Коши (она же однозначная проекция характеристической поверхности на плоскость переменных (x, y)) образована проекциями полухарактеристик, проходящим через точки части Γ , до тех пор, пока они не коснутся $\text{proj } F$ (также у проекций характеристик может быть точка возврата на $\text{proj } F$, но не в этом примере).



В нашем случае проекции характеристик есть прямые

$$\begin{cases} x = t + q, \\ y = qt + 2q^2, \end{cases}$$

$q \in (-1, 0)$, все касающиеся $\text{proj } F$. Поэтому область существования и единственности образована семейством лучей — проекций полухарактеристик. На рисунке зелёным

цветом выделены крайние лучи из этого семейства. Например, наклонный луч соответствует значению $q = -1$ и касается $\text{proj } F$ в точке $(2; -1)$. Граница максимальной области существования и единственности Ω состоит из (замыканий) **зелёных** лучей и (замыкания) **красной** проекции кривой складок. В аналитическом виде

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1, y > -\frac{1}{4}x^2\theta(x), x < 2 \right\},$$

где θ — функция Хевисайда.

7) Найдём точки разрушения решения задачи Коши и выясним их характер. Напомним, что под *blow-up* понимается следующая ситуация: при

$$\Omega \ni (x, y) \rightarrow (x_*, y_*) \in \partial\Omega,$$

где Ω — область существования и единственности, $u(x, y) \rightarrow \infty$ (либо решение не является ограниченным в $U(x_*, y_*) \cap \Omega$, где $U(x_*, y_*)$ — некоторая окрестность точки (x_*, y_*)). В нашем случае *blow-up* отсутствует, потому что функция $u = t^2 + 2tq + q^2 + q$ из параметризации (7) определена при всех t, q .

Под *градиентной катастрофой* понимается другая ситуация: при

$$\Omega \ni (x, y) \rightarrow (x_*, y_*) \in \partial\Omega,$$

где Ω — область существования и единственности, $u(x, y) \rightarrow u_*$ (имеет конечный предел), но $\nabla u(x, y) \rightarrow \infty$ или не ограничен.

Легко видеть, что точки градиентной катастрофы и проекции складки характеристической поверхности — это одно и то же. Таким образом, точки градиентной катастрофы — дуга параболы $\overline{\text{proj } F} = \{x = -2q, y = -q^2, -1 \leq q \leq 0\}$. При стремлении к точкам $\overline{\text{proj } F}$ со стороны Ω градиент

решения стремится к бесконечности. В других точках границы области существования и единственности решение не разрушается, однако его можно продолжить за пределы Ω бесконечным множеством способов (нарушается единственность).

Приложение к примеру — см. оригинальный MAPLE-документ на [странице](#) курса в LMS (free-trial версия MAPLE доступна по [ссылке](#) и работает 15 дней).

3. Обобщённые решения уравнения Хопфа

Задача 1.5. Исследовать обобщённые решения уравнения Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и обобщённые решения задачи Коши для него

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

Вспомним теорию дивергентного квазилинейного уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0 \Rightarrow u_t = - (f(u))_x \quad (2)$$

(для уравнения Хопфа $f(u) = u^2/2$).

Определение. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ называется *обобщённым решением* уравнения (2) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если: 1) $f(u) \in L_{1,loc}(\Omega)$; 2) для любой пробной функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\iint_{\Omega} (uv_t + f(u)v_x) dx dt = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу Коши для дивергентного квазилинейного уравнения

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, (x, t) \in \Pi_T, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\Pi_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$ — полоса,

$u_0 \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ — начальная функция. Введём обозначение

$$\tilde{\Pi}_T = \{-\infty < x < +\infty, 0 \leq t < T\} —$$

полузамыкание полосы Π_T .

Определение. Функция $u \in L_{1,loc}(\tilde{\Pi}_T)$ называется *обобщённым решением* задачи Коши (12) в полосе Π_T , если: 1)

$f(u) \in L_{1,loc}(\tilde{\Pi}_T)$; 2) для любой пробной функции $v \in C_0^\infty(\tilde{\Pi}_T)$ выполнено интегральное тождество

$$\iint_{\Pi_T} (uv_t + f(u)v_x) dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)v|_{t=0} dx = 0. \quad (5)$$

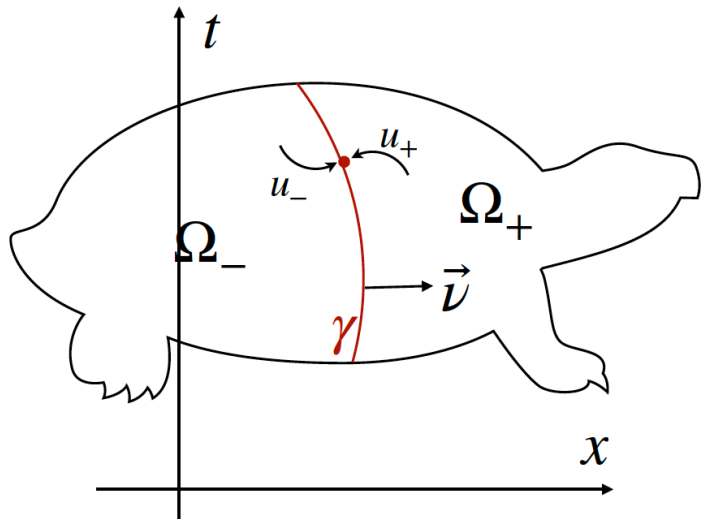
Вернёмся к уравнению (2). Допустим, что область Ω разделена на две части Ω_+ и Ω_- гладкой кривой $\gamma \subset \Omega$: $\Omega = \Omega_- \sqcup \gamma \sqcup \Omega_+$. Пусть $\vec{\nu}$ — ориентирующее γ поле единичных нормалей. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ имеет класс $\tilde{C}^1$ с разрывом γ , если $u|_{\Omega_+} \in C^1(\Omega_+ \cup \gamma)$, $u|_{\Omega_-} \in C^1(\Omega_- \cup \gamma)$ и в любой точке $(x_0, t_0)^T \in \gamma$ существуют $u_-(x_0, t_0) = \lim_{\Omega_- \ni (x,t)^T \rightarrow (x_0,t_0)^T} u(x, t)$, $u_+(x_0, t_0) = \lim_{\Omega_+ \ni (x,t)^T \rightarrow (x_0,t_0)^T} u(x, t)$.

Определение. Ударной волной называется обобщённое решение уравнения (2) класса $\tilde{C}^1$.

Теорема. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ класса $\tilde{C}^1$ с разрывом γ — ударная волна (т.е. обобщённое решение уравнения (2)) $\Leftrightarrow$ она есть классическое решение уравнения (2) в $\Omega_- \sqcup \gamma$ и $\Omega_+ \sqcup \gamma$, удовлетворяющее на линии разрыва γ условию Ранкина—Гюгонио: в любой точке $(x_0, t_0)^T \in \gamma$

$$(u_+ - u_-) \nu_t + (f(u_+) - f(u_-)) \nu_x = 0. \quad (6)$$

Построим простейшее обобщённое решение уравнения Хопфа (ударную волну), которое **не является** классическим. Пусть $\Omega = \Pi_\infty = \{-\infty < x < \infty, t > 0\}$,

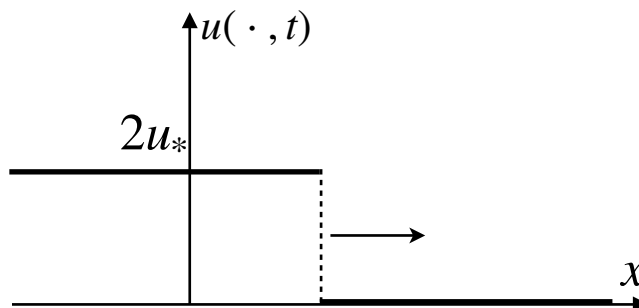
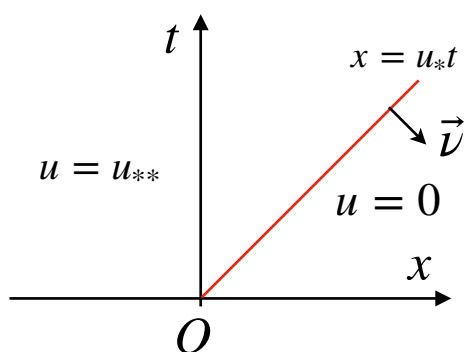


$\gamma = \{x - u_*t = 0, t > 0\}$ — линия (луч) разрыва. Здесь u_* — скорость ударной волны. Тогда функция

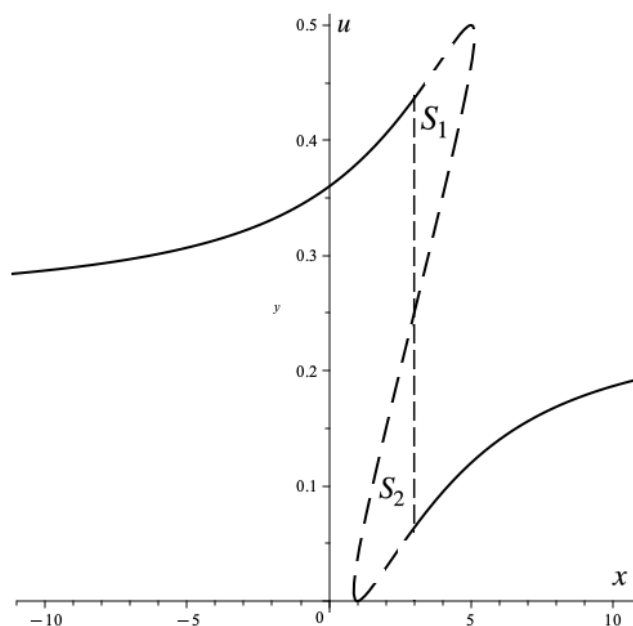
$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > u_*t \\ u_{**}, & x < u_*t \end{cases}$$

есть обобщённое решение уравнения Хопфа. Действительно, проверим условие Ранкина—Гюгонио: $\vec{v} = \vec{e}_x - u_*\vec{e}_t$, $u_+ = 0$,

$$u_- = u_{**} \Rightarrow -u_{**}(-u_*) - \frac{1}{2}u_{**}^2 = 0 \Rightarrow u_{**} = 2u_*.$$



В предыдущей задаче мы построили классическое решение уравнения Хопфа, существующее в Π_{T^*} , но при $t = T^*$ в точке $x = x^*$ происходит градиентная катастрофа. При $t > T^*$ имеем ударную волну с линией разрыва $x = \gamma(t)$, $x^* = \gamma(T^*)$, а решение имеет вид, показанный на рис. справа. Выясним, что это за разрыв.



Рассмотрим интеграл

$$S(t) = \int_a^b u(x, t) dx, \quad -\infty \leftarrow a < b \rightarrow \infty.$$

Запишем $S(t) = \int_a^{\gamma(t)} u(x, t) dx + \int_{\gamma(t)}^b u(x, t) dx$, вычислим

производную:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= u_-(x, t)\dot{\gamma}(t) + \int_a^{\gamma(t)} u_t(x, t)dx - u_+(x, t)\dot{\gamma}(t) + \int_{\gamma(t)}^b u_t(x, t)dt = \\
&= (u_-(x, t) - u_+(x, t))\dot{\gamma}(t) - \int_a^{\gamma(t)} (f(u(x, t)))_x dx - \int_{\gamma(t)}^b (f(u(x, t)))_x dx = \\
&= - (u_+(x, t) - u_-(x, t))\dot{\gamma}(t) + f(u_+(x, t)) - f(u_-(x, t)) + f(u(a, t)) - f(u(b, t)).
\end{aligned}$$

Предположим, что $u(a, t), u(b, t) \rightarrow u_\infty$ при $a \rightarrow -\infty$,

$b \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\frac{dS}{dt} \approx f(u_+(x, t)) - f(u_-(x, t)) - (u_+(x, t) - u_-(x, t))\dot{\gamma}(t) = 0$$

по условию Ранкина-Гюгонио. Таким образом, площадь под графиком $u = u(x, t)$, $a < x < b$, $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$, должна сохраняться. Следовательно, разрыв будет в такой точке $x = \gamma(t)$, что площади S_1 и S_2 равны.