Уравнения первого порядка

1. Линейные уравнения первого порядка

Задача 1.1. Найти общее решение и решить задачу Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = -xy, \\ u\big|_{x=2} = y^2 + 1, \ -\infty < y < +\infty . \end{cases}$$

Решение (метод характеристик).

1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = -xy \Rightarrow x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - xy.$

Составим *систему характеристик* (точка означает производную по фазовому времени t):

нормальная форма Коши — $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{u} = u - xy; \end{cases}$ (1) $\Leftrightarrow$

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{du}{u - xy}$ — симметрическая форма Коши.

2) Найдём общее решение системы характеристик: $x = x_0 e^t$, где $x_0 = x(0)$; $y = y_0 e^t$, где $y_0 = y(0)$. Подставим в третье уравнение: $\dot{u} = u - x_0 y_0 e^{2t} \Leftrightarrow \dot{u} - u = -x_0 y_0 e^{2t}$. Общее решение соответствующего однородного уравнение имеет вид $u = Ce^t$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $u = Ae^{2t}$. Имеем $A = -x_0 y_0$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения есть $u = Ce^t - x_0 y_0 e^{2t}$. $t = 0$: $u_0 = u(0) = C - x_0 y_0 \Rightarrow$ $C = u_0 - x_0 y_0$. Следовательно, $u = \left(u_0 - x_0 y_0\right) e^t - x_0 y_0 e^{2t}$. Общее решение системы характеристик:

$$\begin{cases} x = x_0 e^t, \\ y = y_0 e^t, \\ u = \left(u_0 - x_0 y_0\right) e^t - x_0 y_0 e^{2t}. \end{cases}$$

3) Найдём первый интеграл: $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow$

$d\left(\ln|x| - \ln|y|\right) = 0 \Rightarrow -\ln|x| + \ln|y| = -\tilde{C}_1 \Rightarrow$

$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\tilde{C}_1 \Rightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = e^{-\tilde{C}_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm e^{-\tilde{C}_1} = C_1.$

Заметим, что $y = 0$ — инвариантная плоскость, поэтому $C_1 = 0$ — допустимое значение константы. $y = C_1 x \Rightarrow$ $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u - C_1 x^2}.$

4) Применим следующее свойство равных дробей: если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = dt$, то при любых коэффициентах $k_1, \ldots, k_n$ (хотя бы один из которых не равен нулю) имеем $\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n} = dt$. Найдём этим способом другой первый интеграл, независимый от найденного выше: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{ydx + xdy + du}{yx + xy + u - xy} \Rightarrow$

$\frac{dx}{x} = \frac{d(u + xy)}{u + xy} \Rightarrow d\left(\ln|u + xy| - \ln|x|\right) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\frac{u + xy}{x} = C_2$. При $C_2 = 0$ имеем $u + xy = 0$ — инвариантная поверхность.

Существует ли нетривиальный (отличный от константы) интеграл системы характеристик (1), не имеющий особенностей в $\mathbb{R}^3$? Единственное положение равновесия системы (1) — это точка $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$. Легко видеть, что для любой начальной точки $(x_0, y_0, u_0)^T \in \mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$

$x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$, $u(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Поэтому, если существует (непрерывный) интеграл во всём пространстве, то он должен принимать постоянное значение на каждой фазовой кривой системы (1) $\Rightarrow$ значение в любой точке $(x_0, y_0, u_0)^T \in \mathbb{R}^3 \backslash \{O\}$ равно значению в $O \Rightarrow$ интеграл тривиальный.

Вернёмся к уравнению:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy.$$

5) Запишем общее решение уравнения в параметрическом виде. Для этого рассмотрим общую задачу Коши

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = -xy, \\ u\big|_{x=2} = \varphi(y), \ -\infty < y < +\infty, \end{cases}$$

где $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ — произвольная начальная функция. Пусть $x_0 = 2$, $-\infty < y_0 < +\infty$, тогда $u_0 = \varphi(y_0)$. Общее решение системы характеристик в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = y_0 e^t, \\ u = \left(\varphi(y_0) + 2y_0\right) e^t - 2y_0 e^{2t}, \\ -\infty < t < +\infty, \ -\infty < y_0 < +\infty\,. \end{cases}$$

Мы получили общее решение уравнения в параметрическом виде. Получим его в явном виде: $e^t = \dfrac{x}{2}$, $y_0 = \dfrac{y}{e^t} = \dfrac{2y}{x} \Rightarrow$ общее решение уравнения первого порядка в явном виде:

$$u = \left(\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{4y}{x}\right)\frac{x}{2} - \frac{y}{x}x^2 = \frac{x}{2}\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y - xy.$$

Оно (вообще говоря) определено в полуплоскости $x > 0$. Структура общего решение обычная для линейных

уравнений — общее решение соответствующего линейного однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения.

6) Рассмотрим альтернативный способ получения общего решения уравнения. Для этого нужно взять нелинейную связку двух интегралов и приравнять её к нулю:
$$\Phi\left(\frac{u+xy}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{u+xy}{x} = \tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$$
$u = x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) - xy$ — это тоже общее решение уравнения в полуплоскости $x > 0$. Связь между двумя функциями:
$$x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{2}\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y \Rightarrow \tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{2y}{x}.$$
Пусть $\frac{y}{x} = z$, тогда $\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{2}\varphi(2z) + 2z$.

7) Получим решение задачи Коши для конкретной начальной функции: $\varphi(y) = y^2 + 1 \Rightarrow$
$$u = \frac{x}{2}\left(\frac{4y^2}{x^2} + 1\right) + 2y - xy = \ = \frac{2y^2}{x} + \frac{x}{2} + 2y - xy —$$
решение задачи Коши. Альтернативный метод: подставим общее решение $u = x\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{x}\right) - xy$ в начальное условие $u\big|_{x=2} = y^2 + 1$: $y^2 + 1 = 2\tilde{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) - 2y$. Замена $y = 2z$:
$2\tilde{\varphi}(z) - 4z = 4z^2 + 1 \Rightarrow \tilde{\varphi}(z) = 2z^2 + 2z + \frac{1}{2}$. Имеем решение задачи Коши: $u = \frac{2y^2}{x} + \frac{x}{2} + 2y - xy$.

8) Если взять всю прямую $x = 2$, то область единственности (область влияния) — это область определения решения задачи Коши, т.е. полуплоскость $x > 0$. Рассмотрим отрезок на этой прямой $x = 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда область

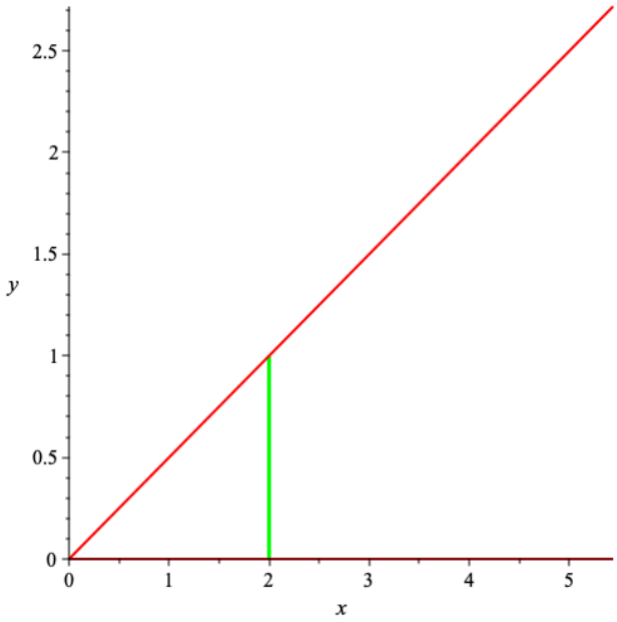
влияния — это область существования и единственности решения задачи Коши для данного отрезка начальной прямой. Для построения области единственности следует через концы дуги начальной кривой провести характеристики, т.е. через концы отрезка начальной прямой провести фазовые кривые системы

$$\dot{x} = x, \dot{y} = y.$$

Общее решение этой системы есть $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^t$. Нижний конец даёт характеристику $x = 2e^t$, $y = 0$ — луч, представляющий собой положительную часть оси Ox. Верхний конец даёт характеристику $x = 2e^t$, $y = e^t \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x, x > 0$ — тоже луч. Итак, область влияния есть

$$D = \left\{ x > 0, 0 < y < \frac{x}{2} \right\}$$

— сектор плоскости.



Задача 1.2. Рассмотрим уравнение неразрывности на прямой, имеющее вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v(x,t)\rho\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}\rho, \quad (2)$$

где $\rho = \rho(x,t)$ — неизвестная функция (плотность), $v = v(x,t)$ — известная функция (проекция скорости сплошной среды на ось Ox), $v \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Уравнение (2) в дифференциальной форме выражает закон сохранения некоторой скалярной величины (массы, электрического заряда и т.д.). Наряду с уравнением (2) рассмотрим стандартную задачу Коши для него

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v(x,t)\rho\right) = 0, \\ \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x)\,. \end{cases} \tag{3}$$

Исследуем задачу Коши (3).

Решение.

1) Запишем систему характеристик (точка — производная по фазовому времени p):

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x,t), \\ \dot{t} = 1, \\ \dot{\rho} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\rho\,. \end{cases} \tag{4}$$

2) Решим систему (4):

- $\dot{t} = 1 \Rightarrow t = p + t_0$. Так как $t_0 = 0$, то $t = p$.
- $\dot{x} = v(x,t), x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow x = X(t, x_0)$ — решение этой задачки Коши, $X(0,x_0) = x_0$. Пример: $v(x,t) = \sin x \Rightarrow$ $\dfrac{dx}{dt} = \sin x \Rightarrow \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt = t + \tilde{C} \Rightarrow$ $\tan\dfrac{x}{2} = \pm e^{\tilde{C}} e^t = Ce^t \Rightarrow x = 2\arctan\left(e^t \tan\dfrac{x_0}{2}\right) + 2\pi k,$ $k = k\left(x_0\right) \in \mathbb{Z}$.
- $\dot{\rho} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\rho \Rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(-\displaystyle\int_0^t v_x\left(X(s,x_0),s\right)ds\right)$.

3) Решим задачу Коши (3) в параметрическом виде:

$$x = X(t,x_0),\ \rho = \rho_0(x_0)\exp\left(-\int_0^t v_x\left(X(s,x_0),s\right)ds\right),$$

$-\infty < t < +\infty, -\infty < x_0 < +\infty$. Выразим x_0 через x, t:
$x_0 = X_0(x,t)$ $(X_0(x,0) = x) \Rightarrow$

$$\rho = \rho_0\left(X_0(x,t)\right)\exp\left(-\int\limits_0^t v_x\left(X(s, X_0(x,t)), s\right)ds\right). \quad (5)$$

Пусть $v(x,t) = v = \text{const}$, $\rho_0(x) = \chi(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$ —
функции Хевисайда, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v\rho\right) = 0, \\ \rho\Big|_{t=0} = \chi(x). \end{cases} \quad (6)$$

- $\dot{x} = v, x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow x = vt + x_0$ — решение задачи Коши $\Rightarrow x_0 = X_0(x,t) = x - vt \Rightarrow \rho = \chi(x - vt)$. $x - vt = 0$ — характеристика $\Rightarrow \vec{\nu} = \mu(\vec{e}_x - v\vec{e}_t)$, где μ — нормирующий множитель.

$$\iint_H \chi(x-vt)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdt + \int\limits^{\infty}\chi(x)\varphi(x,0)dx = 0;$$

$$\iint_{x-vt>0, t>0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdt + \int\limits^{-\infty}_{\infty}\chi(x)\varphi(x,0)dx = 0;$$

$$\int_0^{\infty}\varphi(x,0)(-1)dt + \int_0^{\infty}\varphi(vt,t)\nu_t k dt + \int_0^{\infty} v\varphi(vt,t)\nu_x k dt + \int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x,0)dx = 0;$$

$$\int_0^{\infty}\varphi(vt,t)\left(\nu_t + v\nu_x\right)k dt = 0;$$

$$\int_0^{\infty}\varphi(vt,t)\left(-\mu v + v\mu\right)k dt = 0 \text{ — тождество.}$$

Рассмотрим общую задачу Коши для уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v(x,t)\rho\right) = 0, t > 0, \\ \rho\Big|_{t=0} = \rho_0(x), \end{cases}$$

$\rho_0 \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$. Возьмём пробную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\overline{H})$, H — верхняя полуплоскость, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\Omega}$ — компакт, Ω — некоторый полудиск. Имеем

$$\iint_H \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v(x,t)\rho\right)\right)\varphi(x,t)dxdt = 0 \Rightarrow$$

$$-\iint_H \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}dxdt - \iint_H v(x,t)\rho\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x)\varphi(x,0)\nu_t dx +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x)v(x,0)\varphi(x,0)\nu_x dx = 0 \Rightarrow$$

$$-\iint_H \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}dxdt - \iint_H v(x,t)\rho\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x)\varphi(x,0)(-1)dx = 0;$$

$$\iint_H \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}dxdt + \iint_H v(x,t)\rho\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdt + \int\limits_{-\infty}^{-\infty\infty} \rho_0(x)\varphi(x,0)dx = 0;$$

$$\iint_H \rho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x)\varphi(x,0)dx = 0. \quad (7)$$

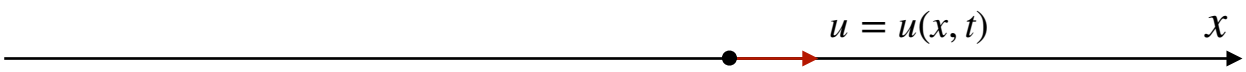
Определение. Функция $\rho \in L_{1,loc}\left(\overline{H}\right)$ называется обобщённым решением задачи (3), если для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\overline{H})$ выполнено интегральное равенство (7).

2. Квазилинейные уравнения первого порядка: классические решения

Задача 1.3. Исследуем классические решения уравнения Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ и задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (8)$$

Решение. 1) Происхождение уравнения Хопфа. Переменные Лагранжа: $x = ut + \xi$, где ξ — начальная координата точки сплошной среды, u — проекция на ось Ox



скорости точки сплошной среды, x — координата точки в момент времени t, $u = u(x,t)$ — скорость точки сплошной среды, которая в момент времени t имеет координату x. Поскольку в рамках этой модели на точки сплошной среды силы не действуют, $\frac{du}{dt} = 0$ (полная производная скорости равна нулю) $\Leftrightarrow 0 = \frac{du}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}u$ — уравнение Хопфа.

2) Система характеристик для уравнения Хопфа имеет вид

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = u, \\ \dot{u} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}.$$

Общее решение системы характеристик: $t = p + t_0$, $x = u_0 p + x_0, u = u_0$, где $t_0 = t(0), x_0 = x(0), u_0 = u(0)$.

Интегралы системы характеристик: $u = C_1 \Rightarrow dx - C_1 dt = 0$

$\Rightarrow d\left(x - C_1 t\right) = 0 \Rightarrow x - C_1 t = C_2 \Rightarrow x - ut = C_2$. $I = u$, $J = x - ut$ — два независимых интеграла системы характеристик. Действительно, ранг матрицы Якоби

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_x & I_t & I_u \\ J_x & J_t & J_u \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -u & -t \end{pmatrix} = 2.$$

3) Найдём общее решение уравнения Хопфа в параметрическом виде. Пусть (t_0, x_0) — произвольная точка на начальной кривой $\gamma = \{t = 0\}$, т.е. $t_0 = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $u_0 = v(x_0) \Rightarrow (0, x_0, v(x_0)) \in \Gamma$, где Γ — график начальной функции. Параметризация интегральной поверхности:

$$\begin{cases} x = u_0\left(x^0\right) p + x_0, \\ t = p, \\ u = u_0\left(x^0\right). \end{cases} \qquad (9)$$

Если $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, то формула (9) даёт общее решение уравнения Хопфа в параметрическом виде.

Общее решение уравнения Хопфа в неявном виде: $V(u, x - ut) = 0$, где $V \in C^1$, $\dfrac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ в окрестности точки начальной кривой $\gamma \Leftrightarrow \dfrac{\partial V}{\partial I}\dfrac{\partial I}{\partial u} + \dfrac{\partial V}{\partial J}\dfrac{\partial J}{\partial u} = \dfrac{\partial V}{\partial I} - t\dfrac{\partial V}{\partial J} \neq 0$ в окрестности точки начальной кривой $\gamma \Leftrightarrow \dfrac{\partial V}{\partial I} \neq 0$ в точке (в окрестности точки) начальной кривой γ. Примеры: $V(I, J) = I \Rightarrow u = 0$ — тривиальное решение уравнения Хопфа; $V(I, J) = J \Rightarrow x - ut = 0$, т.е. $u = \dfrac{x}{t}$ — частное решение уравнения Хопфа при $t > 0$, оно не может быть решением задачи Коши (8).

4) Формулы (9) дают параметрическое решение задачи Коши. Также решение задачи Коши можно получить из неявного общего решения $V(u, x-ut)=0$. Подстановка начального условия в неявное общее решение даёт: $V\left(u_0(x), x\right)\big)=0$. Найдём частное нетривиальное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\dfrac{\partial V}{\partial I}\neq 0$. Оно имеет вид $V(I,J)=I-u_0(J)$. Имеем $\dfrac{\partial V}{\partial I}=1\neq 0$. Таким образом, решение задачи Коши в неявном виде представляет собой $u=u_0(x-ut)$.

Исследуем глобальную разрешимость задачи Коши для уравнения Хопфа.

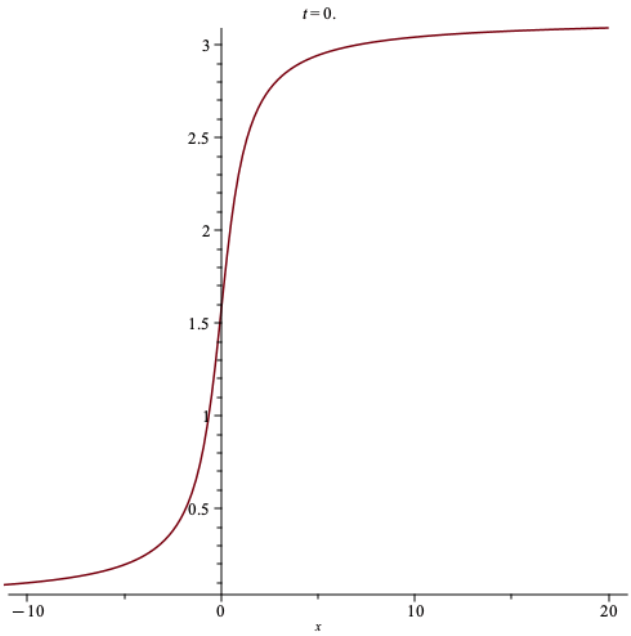
- Пусть u_0 — неубывающая функция на прямой, т.е. $u_0'(x)\geqslant 0$ при любом x. Тогда решение задачи (8) существует при любом $t>0$. Действительно, рассмотрим отображение проектирования $S\ni(x,t,u)\mapsto(x,t)\in\mathbb{R}^2$ и связанное с ним отображение $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\ni\left(x_0,p\right)\mapsto(x,t)\in\mathbb{R}^2$, запишем матрицу Якоби второго отображения
$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x}{\partial p}\\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial x_0} & \dfrac{\partial t}{\partial p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0'\left(x_0\right)p+1 & u_0\left(x_0\right)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Якобиан $u_0'\left(x_0\right)p+1\geqslant 1$ для всех $p\geqslant 0$ и $x_0\in\mathbb{R}$. Следовательно, отображение проектирования не имеет особенности при $t\geqslant 0$, и часть интегральной поверхности, соответствующая $t\geqslant 0$, однозначно проектируется на плоскость независимых переменных, классическое решение задачи (8) существует при любых $t>0$.

Пример: рассмотрим начальную функцию $u_0(x)=\arctan x+\dfrac{\pi}{2}$. Решение задачи Коши представляется неявной формулой $u=\arctan(x-ut)+\dfrac{\pi}{2}$, очевидно, что

решение ограничено.
Продифференцируем по x:

$$u_x = \frac{1}{1 + t + (x - ut)^2} > 0,$$

кроме того, $u_x < \frac{1}{1+t}$.
Построим анимацию решения в MAPLE.

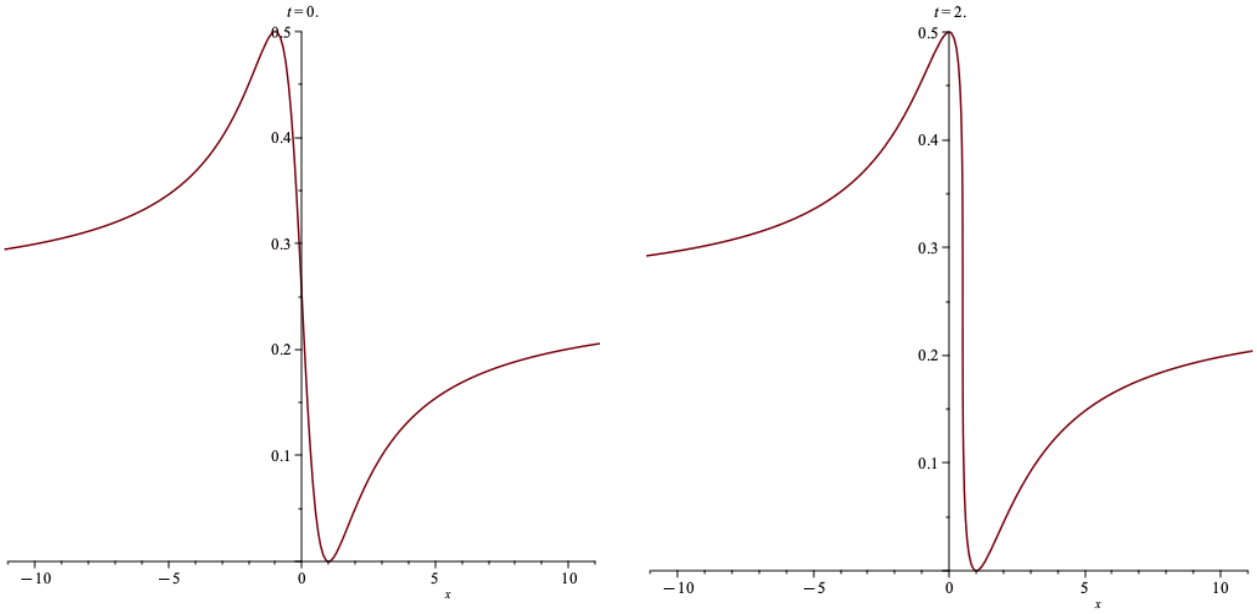


- Пусть $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ (непрерывно дифференцируемая и ограниченная функция), но существует открытое множество на прямой, в котором $u_0' < 0$. Предположим, что оно связное: для $x \in (a,b)$ $u_0'(x) < 0$; если $x \notin (a,b)$, то $u_0'(x) \geqslant 0$. Тогда решение задачи Коши существует в области $\Pi_{T^*} = \{-\infty < x < +\infty, 0 < t < T^* < \infty\}$ и в некоторой точке x^* производная решения $u_x(x^*, t) \to \infty$ при $t \to T^* - 0$. Такая ситуация называется градиентной катастрофой, а T^*, x^* — временем и точкой градиентной катастрофы соответственно.
- Вернёмся к якобиану отображения, ассоциированного с проектированием: $u_0'\left(x^0\right) p + 1 > 0$ для всех $p = t \in [0, T^*)$ и $x_0 \in (-\infty, +\infty)$; $u_0'\left(\hat{x}\right) T^* + 1 = 0$, где $\hat{x} \in \operatorname{argmax}_{x_0 \in (a,b)} \left| u_0'(x_0) \right|$. Отсюда $T^* = -\frac{1}{u_0'\left(\hat{x}\right)}$, $x^* = u_0\left(\hat{x}\right) T^* + \hat{x}$.

Пример: рассмотрим начальную функцию $u_0(x) = \frac{-x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{4}$. Имеем $u_0'(x) = \frac{x^2 - 1}{2\left(1+x^2\right)^2} < 0$ тогда и только тогда, когда $|x| < 1$. Максимум модуля производной

на $(-1,1)$ равен $1/2$ и он достигается в точке $\hat{x} = 0$, следовательно, время градиентной катастрофы $T^* = \dfrac{1}{|u_0'(\hat{x})|} = 2$, а точка $x^* = u_0\left(\hat{x}\right) T^* + \hat{x} = \dfrac{1}{4} \cdot 2 + 0 = \dfrac{1}{2}$.

Построим анимацию решения в MAPLE при $0 < t < T^*$ и при $t > T^*$, когда решение становится многозначным.



Замечание: классическое решение при $t > T^*$ не существует, но существует обобщённое решение, речь о котором пойдёт далее в этой теме.