ТЕМЫ И СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИЙ

1. **Введение (лекции 1 – 2).** О рейтинговой системе. Примеры уравнений в частных производных. Решение уравнения Д'Аламбера $u_{tt} = u_{xx}$. Структура курса и литература. Линейные дифференциальные операторы (ЛДО), символ и главный символ ЛДО. Области и границы, классы гладкости границ. Классические функциональные пространства. Носитель функции. Пространства основных функций. Формула Стокса, формула Грина, формула Гаусса–Остроградского. Формула многомерного интегрирования по частям. Формально сопряжённый ЛДО. Пространства Лебега квадратично интегрируемых функций: определение, полнота. Теорема о плотности пространства непрерывных функций $C\left(\overline{\Omega}\right)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Непрерывность функций из $L_2(\Omega)$ в среднем. Оператор усреднения: определение, свойства. Лемма об усреднении функций из $L_2(\Omega)$. Теорема о плотности основных функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Лемма Дюбуа-Реймона. [1: глава 1, §1], [2: chapter 1], [3: глава 1, §§1–4], [6: глава II], [7: глава 1, 1.2], [8: главы 1, 2], [9: глава 1, §1], [16: chapter 1], [18: chapter 1], [19: chapter 1]

2. **Уравнения первого порядка (лекции 2 – 4).** Иерархия и примеры уравнений первого порядка. Системы характеристик для линейного, квазилинейного и существенно нелинейного уравнения первого порядка. Система характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби. Словарь геометрической теории ОДУ: фазовое пространство, векторное поле, фазовый поток, траектории, инвариантные множества, (первые) интегралы. Связь уравнения первого порядка и его системы характеристик. Задача Коши для линейного уравнения первого порядка. Условие трансверсальности. Корректность по Адамару начальных задач. Глобальная теорема о существовании единственного классического решения, область единственности. Задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. Условие трансверсальности. Стандартная задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка. Локальная теорема о существовании единственного классического решения стандартной задачи Коши. Особенности классических решений квазилинейных уравнений первого порядка: blow-up, градиентная катастрофа. Необходимость рассмотрения обобщённых решений. Определение обобщённых решений уравнения Хопфа $u_t + (f(u))_x = 0$ и задачи Коши для него. Связь классических и обобщённых решений. Ударные волны с дискретным множеством разрывов. Условие Ранкина–Гюгонио. Проблема неединственности обобщённого решения задачи Коши и пути её решения: метод исчезающей вязкости, энтропийный решения. [2: chapter 3, chapter 7], [11: главы 2–5], [14: chapters 7, 8], [16: chapter 2], [19: chapter 8], [21: chapter 7], [22: chapter 6], [23: chapters 5–10]

3. **Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка (лекция 5).** Классификация полулинейных уравнений второго порядка в точке. Алгоритм приведения к каноническому виду полулинейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в старшей части.

Классификация уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Теоремы о приведении $2D$ полулинейных уравнений второго порядка в окрестности точки: 1) гиперболического типа; 2) параболического типа; 3) эллиптического типа. Уравнение характеристик, характеристики. [1: глава 1], [4: лекция III], [6: глава 1, §2], [7: глава 2, §2.2], [9: глава 1, §3], [10: 1.6], [15: глава 1], [16: chapter 3, §3.1]

4. **Задача Коши: часть 1 (лекции 6 – 7).** Задача Гурса для $2D$ линейного гиперболического уравнения второго порядка в каноническом виде: постановка, эквивалентность системе интегральных уравнений, метод Пикара. Существование единственного классического решения задачи Гурса. Формула Римана. Функция Римана линейного гиперболического оператора: определение, существование и единственность, некоторые свойства. Интегральное представление решение задачи Гурса. Задача Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка. Условия трансверсальности. Теорема о существовании единственного классического решения задачи Коши, формула интегрального представления. Область единственности и область влияния. Задача Коши для волнового уравнения с одной пространственной переменной. Теорема о существовании единственного классического решения. Формула Д'Аламбера. Необходимость рассмотрения обобщённых решений. Определение пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$ первого порядка в $2D$ области. Основные свойства и конструкции с пространствами Соболева: полнота, теорема о продолжении и её следствия, теорема о компактности, след функции (без доказательств). Задача Коши для волнового уравнения с периодическим условием по пространственной переменной. Определение обобщённых решений задачи Коши для волнового уравнения. Теорема о существовании единственного обобщённого решения. Обобщённые решения волнового уравнения с конечным (дискретным) множеством разрывов на характеристиках. [4: лекции IV, V], [9: глава 3, §15], [10: §2], [14: chapter 6], [15: глава II, §§2, 4, 5], [19: chapter 2], [21: chapter 2], [22: chapter 6]

5. **Фундаментальное решение оператора Лапласа (лекция 8).** Эллиптические ЛДО. Эллиптические ЛДО второго порядка, дивергентная форма эллиптического ЛДО второго порядка. Оператор Лапласа, уравнения Лапласа и Пуассона. Постановки задачи Дирихле, задачи Неймана и задачи Робена для уравнения Пуассона. Внутренние краевые задачи. Корректность по Адамару краевых задач. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа. Фундаментальное решение оператора Лапласа: общая формула, свойства. Формула интегрального представления функций из пространства $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя, объёмный потенциал. Логарифмический потенциал простой кривой, логарифмический потенциал двойной кривой, потенциал площади. [1: глава III], [4: лекции IX, XI-XIII, XV, XVII, XXI], [5: глава 2], [9: глава I, §4; глава II, §5; глава III, §11; глава V, §§27, 29], [10: §10], [12: глава 8], [15: глава IV, §§4, 5], [19: chapter 4], [20: главы 2–4]

ТЕМЫ И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ. ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. **Уравнения первого порядка (занятия 1 – 3)**: первое и второе дом. задания. Задача Коши для линейного уравнения первого порядка: решение в параметрическом виде, решение в явном виде, область существования и единственности. Уравнение неразрывности на прямой: общее решение, примеры начальных условий. Классические решения уравнения Хопфа: вывод, система характеристик, решение задачи Коши (в параметрическом и неявном виде), достаточное условие разрешимости в полосе, градиентная катастрофа. Задача Коши для $2D$ квазилинейного уравнения первого порядка: проверка условия трансверсальности, решение в параметрическом и неявном виде, максимальная область существования единственного классического решения, особенности решения. Обобщённые решения уравнения Хопфа: ударные волны с одним или несколькими разрывами, проверка условия Ранкина–Гюгонио. [12: главы 4, 6], [24: №14.26], [26: chapter 12], [27: chapter 2], [29: §20], [31: lecture 26], [33: chapter 12]

2. **Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка (занятия 4 – 5)**: третье и четвёртое дом. задания. Приведение линейного уравнения второго порядка с постоянными старшими коэффициентами к каноническому виду: случай $n = 3$, случай $n = 4$. Приведение к каноническим видам уравнения Трикоми $u_{xx} - xu_{yy} = 0$. Приведение параболического уравнения второго порядка к каноническому виду. [24, глава 1, §2], [25: глава 1], [26: chapter 11], [27: chapter 3], [31: lecture 28], [32: §1]

3. **Линейные гиперболические 2D уравнения второго порядка (занятия 5 – 7)**: пятое дом. задание. Общее решение $2D$ уравнений второго порядка: метод факторизации. Решение задачи Гурса и задачи Коши через общее решение уравнения. Функция Римана оператора Клейна–Гордона $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda$, $\lambda = \text{const}$. Общее решение уравнения $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$, $a, b, c = \text{const}$. Классические и обобщённые решения задачи Коши для волнового уравнения с одной пространственной переменной $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$: формула Д'Аламбера, принцип Дюамеля, решения с разрывами первых производных. [18: chapter 2, 2.4], [24: глава 1, §2; глава IV, §§12, 14], [25: глава II, §2], [26: chapter 12, 12.3], [27: chapter 5], [28: глава 2, §2.1], [30: глава 1], [32: §2]

4. **Потенциалы (занятие 8)**: шестое дом. задание. Радиально-симметричные решения уравнения Лапласа. Определение потенциалов Ньютона–Кулона, некоторые свойства. Объёмный потенциал: однородный шар. Потенциал простого слоя: однородная сфера. Определение логарифмических потенциалов, некоторые свойства. Потенциал двойной кривой: однородная и неоднородная окружность. [24: глава V, §18], [25: глава IV, §5], [30: глава IV, §2]

РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА

Рейтинговый показатель (далее, для краткости, рейтинг) включает в себя пять блоков.

1) ***Посещаемость лекций.*** Всего запланировано 8 (восемь) лекций. За посещение каждой лекции студент/студентка получает 1 балл, за посещение всех лекций — 8 баллов.

2) ***Посещаемость практических занятий (ПЗ).*** Всего запланировано 8 (восемь) ПЗ. За посещение каждого ПЗ студент/студентка получает 1 балл, за посещение всех ПЗ — 8 баллов.

3) ***Активность на ПЗ и тесты.*** За один выход к доске студент/студентка получает 2 балла. За ответ на вопрос преподавателя или уместный вопрос (замечание) студент/студентка получает 1 балл. Также будут организованы два теста по темам лекций и практических занятий. За данный блок студент/студентка может получить до 16 баллов.

4) ***Домашние задания (ДЗ).*** Всего запланировано 6 (шесть) домашних заданий. За выполнение ДЗ #1 в срок студент/студентка получает 7 баллов; за выполнение ДЗ #2 в срок — 9 баллов; за выполнение ДЗ #3 в срок — 6 баллов; за выполнение ДЗ #4 в срок — 7 баллов; за выполнение ДЗ #5 в срок — 9 баллов; за выполнение ДЗ #6 в срок — 8 баллов. Будут организованы выборочные защиты заданий! Таким образом, выполнив и защитив все задания в срок, студент/студентка получит $7+9+6+7+9+8=46$ баллов. Если задание решено полностью, но сдано после дедлайна, за него можно получить до половины от положенных баллов.

5) ***Теоретический коллоквиум.*** В декабре запланирован один теоретический коллоквиум. Он оценивается по шкале A, A–, B+, B, B–, C+, C, C–, D+, D и F и переводится в рейтинговые баллы 22.0, 20.0, 18.0, 16.0, 14.0, 12.0, 10.0, 9.0, 8.0, 7.0 и 0.0 соответственно. Программа и правила коллоквиума будут изложены в отдельно файле.

Текущий рейтинг можно узнать в рейтинговой таблице (первый раз она будет выложена в конце октября). Вычислим максимально возможный рейтинг студента/студентки:

$$8+8+16+46+22=100\,\text{баллов}.$$

Критерий перевода рейтинга в оценку: оценка ‘5’ («отлично») — 80 – 100 баллов; оценка ‘4’ («хорошо») — 65 – 79 баллов; оценка ‘3’ («удовлетворительно») — 50 – 64 баллов; оценка ‘2’ («неудовлетворительно») — 0 – 49. Во второй половине декабря будут назначены дополнительные зачёты, призванные повысить рейтинг студентов/студенток.

ЛИТЕРАТУРА И РЕСУРСЫ

0. Лекции, материалы и главы книги А.Е. Байкова: https://baikov.org/pde.

1. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИФМЛ, 1961.

2. Evans, L.C. Partial Differential Equations. Second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

3. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

4. С.Л. Соболев. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

5. Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, ГРФМЛ, 1989.

6. В.П. Михайлов. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976.

7. О.А. Олейник. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015.

8. Л.Е. Россовский, А.Л. Скубачевский. Введение в теорию уравнений с частными производными. М.: МЦНМО, 2021.

9. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

10. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.

11. А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин. Уравнения с частными производными первого порядка. Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999. http://new.math.msu.su/diffur/pde-first.pdf

12. В.А. Тиморин. Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2017.

13. Axler, S. Bourdon, P. Ramey, W. Harmonic Function Theory, second edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2001: https://www.axler.net/HFT.html.

14. DiBenedetto, E. Partial Differential Equations. Second Edition. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2010.

15. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.

16. Qing Han. A Basic Course in Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

17. Qing Han, Fanghua Lin. Elliptic Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

18. Peter J. Olver. Introduction to Partial Differential Equations. Springer, 2014. https://www-users.cse.umn.edu/ olver/pde.html

19. Walter Craig. A Course on Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

20. А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шапкина. Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ, 2012. http://math.phys.msu.su/archive/2014_2015/51/10_Func_Grina_WEB.pdf

21. Piero Bassanini, Alan R. Elcrat. Theory and Applications of Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, 1997.

22. Marcelo R. Ebert, Michael Reissig. Methods for Partial Differential Equations. Birkhäuser, 2018.

23. Hyun-Ku Rhee, Rutherford Aris, Neal R. Amundson. First-Order Partial Differential Equations. Volume 1: Theory and Application of Single Equations. Dover Publication, Mineola, New York, 1986.

24. В.С. Владимиров и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

25. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

26. Constanda, C. Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations. Taylor & Francis Group, 2016.

27. Henner, V., Belozerova, T., Nepomnyashchy, A. Partial Differential Equations: Analytical Methods and Applications. Taylor & Francis Group, 2020.

28. В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.

29. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

30. А.И. Комеч. Практические решение уравнений математической физики. Мехмат МГУ, 1993: http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf.

31. Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan. Ordinary and Partial Differential Equations. With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems. Springer Science+Business Media, 2009.

32. М.М. Смирнов. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975.

33. Victor Ivrii. Partial Differential Equations. Toronto, Ontario, Canada, 2017. https://www.math.toronto.edu/ivrii/PDE-textbook