Листок #4: лекционные задачки по теме 4 «Эллиптические операторы второго порядка» и теме 5 «Начально-краевые задачи»

Задачка 4.1. Пусть $\lambda_k(\Omega)$, $\lambda_k(Q)$ — k-ые ($k \in \mathbb{N}$) упорядоченные по возрастанию обобщённые собственные значения оператора $-\Delta$ в областях $\Omega \Subset Q \Subset \mathbb{R}^n$ соответственно с краевым условием Дирихле, $\partial\Omega \in C^1$, $\partial Q \in C^1$. Доказать, что $\lambda_k(\Omega) < \lambda_k(Q)$ для всех k.

Задачка 4.2. Показать, что функция $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область), удовлетворяющая при всех $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ интегральному равенству $\int_\Omega u\Delta v dx = 0$, есть классическая гармоническая функция в Ω (другими словами, обобщённых гармонических функций, которые не являются классическими, не существует).

Задачка 4.3. Доказать, что если $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^2$, то минимальное собственное значение оператора $-\Delta$ с краевым условием Дирихле однократно, а соответствующая ему собственная функция нигде не равна нулю в Ω.

Задачка 4.4. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. На множестве функций $u \in C^2(\Omega) \cap C_0\left(\overline{\Omega}\right)$, для которых $\Delta u \in L_2(\Omega)$, введено скалярное произведение по формуле $(u, v) = \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v dx$. Показать, что соответствующее евклидово пространство не будет полным. Описать его пополнение в терминах пространств Соболева.

Задачка 4.5. Рассмотрим третью начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,t),\ x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n\ (\partial\Omega \in C^1),\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + \sigma(x)u\Big|_{\Gamma_T} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

Здесь $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, коэффициент $\sigma \in C(\partial\Omega)$. Дать определение обобщённого решения этой задачи и доказать его единственность.

Задачка 4.6. Рассмотрим третью начально-краевую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x,t),\ x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n\ (\partial\Omega \in C^1),\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + \sigma(x)u\Big|_{\Gamma_T} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Здесь $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, коэффициент $\sigma \in C(\partial\Omega)$. Дать определение обобщённого решения этой задачи и доказать его единственность.

Задачка 4.7. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ x > 0,\ 0 < t < T, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Дать определение обобщённого решения этой задачи. Доказать его существование при $\varphi \in H^1_{loc}[0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, $\psi \in L_{2,loc}[0,\infty)$ и единственность.

Задачка 4.8. Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \alpha\left(|x|\right),\ u_t|_{t=0} = \beta\left(|x|\right) \end{cases}$$

достаточно, чтобы $\alpha \in C^3[0,\infty)$, $\beta \in C^2[0,\infty)$, $\alpha'(0) = 0$. Найти это решение.

Задачка 4.9. Доказать, что для существования решения задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = f\left(x_1\right) g\left(x_2, x_3\right),\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

достаточно, чтобы $f \in C^2(\mathbb{R})$, а g была гармонической функцией на $\mathbb{R}^2$. Найти это решение.