ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА

1. Оператор Лапласа

1.1. Фундаментальное решение оператора Лапласа: определение, формула, свойства. Формула интегрального представления функций.

1.2. Функция Грина внутренней задачи Дирихле: определение, свойства. Интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

1.3. Функция Грина задачи Дирихле в шаре. Инверсия. Преобразование Кельвина. Формула Пуассона.

1.4. Функция Грина внутренней задачи Робена: определение. Интегральное представление решения задачи Робена для уравнения Пуассона.

1.5. Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона: необходимое условие разрешимости. Функция Грина внутренней задачи Неймана: нестандартное определение. Интегральная формула.

1.6. Гармонические, субгармонические и супергармонические функции. Теоремы о среднем для суб-, супер- и гармонических функций.

1.7. Принцип максимума для субгармонических функций. Следствие для гармонических функций. Единственность решения внутренней задачи Дирихле.

1.8. Условие внутренней сферы. Лемма Хопфа–Олейник о нормальной производной. Ядро внутренней задачи Неймана в области с границей класса C^2.

1.9. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Внутренняя априорная оценка производных гармонических функций.

1.10. Устойчивость внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

1.11. Качественная теория гармонических функций: аналитичность, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.

1.12. Обратная теорема о среднем. Теорема Вейерштрасса для гармонических функций.

1.13. Непрерывные суб- и супергармонические функции. Множество субрешений. Решение Перрона внутренней задачи Дирихле.

1.14. Теорема Арцела о предкомпактности в пространстве $C(K)$, где K — метрический компакт. Лемма Монтеля. Теорема Перрона.

1.15. Барьеры. Регулярные точки и регулярные границы. Лемма о регулярности. Критерий разрешимости внутренней задачи Дирихле.

2. Пространства Соболева

2.1. Определение и основные свойства обобщённых производных.

2.2. Определение пространств Соболева $H^k(\Omega)$ в ограниченной области Ω, $k \in \mathbb{N}$. Полнота пространств Соболева. Простые свойства пространств Соболева.

2.3. Теорема о финитном продолжении функций из пространства Соболева функций и её следствия.

2.4. Принцип разбиения единицы для компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

2.5. Компактные операторы: определение и свойства. Теорема о компактном вложении пространства $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

2.6. Теорема вложения Соболева.

2.7. Принцип непрерывного продолжения операторов. Конструкция оператора следа $T : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$. Пространство $H_0^1(\Omega)$, эквивалентные определения.

2.8. Пространство следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$: определение, эквивалентная норма, полнота. Теорема о (тонком) поднятии.

2.9. Теорема об эквивалентной норме.

3. Эллиптические операторы второго порядка

3.1. Эллиптические операторы второго порядка в дивергентной форме. Равномерная эллиптичность. Дивергентные равномерно эллиптические операторы второго порядка. Постановка краевых задач.

3.2. Определение обобщённых решений стандартных внутренних краевых задач для дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка.

3.3. Абстрактный функционал энергии в гильбертовом пространстве. Постановка вариационной проблемы. Теорема об экстремали функционала энергии. Необходимое условие экстремали.

3.4. Метод Ритца. Теорема о сходимости последовательности в методе Ритца.

3.5. Функционал энергии задачи Дирихле для дивергентного эллиптических операторов второго порядка.

3.6. Функционал энергии позитивной задачи Робена для дивергентного равномерно эллиптического оператора второго порядка.

3.7. Корректность (однозначная разрешимость и устойчивость) внутренней задачи Дирихле для дивергентного равномерно эллиптического уравнения второго порядка.

3.8. Корректность (однозначная разрешимость и устойчивость) внутренней задачи Робена для дивергентного равномерно эллиптического уравнения второго порядка.

3.9. Фредгольмовы операторы между гильбертовыми пространствами. Индекс фредгольмового оператора. Теорема Рисса–Шаудера.

3.10. Фредгольмова разрешимость задачи Неймана для анизотропного уравнения Пуассона. Критерий разрешимости в явной форме.

3.11. Фредгольмова разрешимость внутренней задачи Дирихле для равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Сопряжённая задача. Критерий разрешимости в интегральной форме.

3.12. Фредгольмова разрешимость внутренней задачи Робена для равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Сопряжённая задача. Критерий разрешимости в интегральной форме.

3.13. Теорема Гильберта-Шмидта о спектре и собственных элементах компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве.

3.14. Определение обобщённых с.з. и с.ф. дивергентного равномерно эллиптического оператора с условиями Дирихле / Неймана / Робена на границе области определения.

3.15. Теорема о спектре и (обобщённых) с.ф. дивергентного равномерно эллиптического оператора второго порядка с условиями Дирихле на границе области определения.

4. Начально-краевые задачи

4.1. Постановка первой / второй / третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка. Определение обобщённых решений (краевые условия однородные).

4.2. Постановка первой / второй / третьей начально-краевой для гиперболического уравнения второго порядка. Определение обобщённых решений (краевые условия однородные).

4.3. Единственность обобщённого решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности / волнового уравнения.

4.4. Метод Фурье построения решения первой начально-краевой задачи для параболического уравнения. Обоснование метода в случае уравнения теплопроводности. Теорема о корректности.

4.5. Метод Фурье построения решения первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Обоснование метода в случае волнового уравнения. Теорема о корректности.

ТИПЫ ЗАДАЧ НА ЭКЗАМЕНЕ[1]

1) Построение функции Грина краевой задачи для уравнения Пуассона методом отражений / методом конформных преобразований.

2) Решение краевой задачи для уравнения Лапласа / уравнения Пуассона в прямоугольнике разделением переменных в декартовых координатах.

3) Решение краевой задачи для уравнения Лапласа / уравнения Пуассона в круге / секторе круга / кольце разделением переменных в полярных координатах.

4) Решение спектральной задачи для оператора $-\Delta$ в прямоугольнике.

5) Получение функционала энергии для краевой задачи в прямоугольнике / круге / секторе круга / кольце.

6) Варьирование данного функционала энергии, получение уравнения Эйлера–Лагранжа и краевых условий.

ПРАВИЛА ЭКЗАМЕНА

- Программа экзамена состоит из 44 вопросов.
- Билет включает в себя два вопроса из представленного списка и две задачи предложенных выше типов. В задачах исключаются громоздкие вычисления.
- Пользоваться чем-либо на экзамене, кроме ручки, бумаги, собственного тела и духа, категорически запрещено.
- На подготовку ответов на вопросы и решение задач даётся не более 90 минут. Доказательства теорем приводить не обязательно, но формулировки определений и теорем должны быть точными и полными. Во время ответа лектор оставляет за собой право задать дополнительные вопросы из той лекционной темы, которой принадлежит обсуждаемый вопрос билета.
- Критерий выставления оценки: оценка ‘5’ («отлично») — 2 (две) полностью решённые задачи и убедительные ответы на 2 (два) вопроса из билета; оценка ‘4’ («хорошо») — 1 (одна) полностью решённая задача и убедительные ответы на 2

[1] Примеры задач на экзамене смотрите в отдельном файле на страницах курса.

(два) вопроса из билета либо 2 (две) полностью решённые задачи и убедительный ответ на 1 (один) вопрос из билета; оценка ‘3’ («удовлетворительно») — 1 (одна) полностью решённая задача и убедительный ответ на 1 (один) вопрос из билета.

- Оценка, полученная в семестре, **не сгорает** на экзамене и влияет на него следующим образом: оценка ‘3’ («удовлетворительно») снимает один вопрос или одну задачу из билета (на выбор студента / студентки); рейтинговая оценка ‘4’ («хорошо») снимает один вопрос и одну задачу из билета.

РЕСУРСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

0. Лекции и материалы А.Е. Байкова на странице курса в LMS и на https://baikov.org/pde.

1. Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, ГРФМЛ, 1989.

2. О.А. Олейник. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015.

3. Л.Е. Россовский, А.Л. Скубачевский. Введение в теорию уравнений с частными производными. М.: МЦНМО, 2021.

4. В.П. Михайлов. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976.

5. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

6. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.

7. В.С. Владимиров и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.