ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пусть $\Omega = (0,L) \times (0,L)$ — квадрат. Рассматривается уравнение $\mathscr{L}u = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, где $\mathscr{L}$ — дивергентный равномерно эллиптический в $\overline{\Omega}$ оператор второго порядка. На границе $\partial\Omega$ рассматривается комбинация условий Дирихле / Неймана / Робена. Предлагается найти приближённое решение краевой задачи вариационным методом. Для этого:

1) определить энергетическое пространство H как некоторое замкнутое подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и ввести функционал энергии $E = E(u)$, $u \in H$;
2) варьируя функционал энергии $E = E(u)$, убедиться в том, что $\mathscr{L}u = f(x,y)$ — действительно его уравнение Эйлера-Лагранжа, краевые условия для которого есть заданные краевые условия;
3) в энергетическом пространстве H выбрать тригонометрический или полиномиальный базис в зависимости от вычислительных преимуществ;
4) получить общую схему Ритца построения минимизирующей последовательности для экстремали $\operatorname{argmin}_{u \in H} E(u)$;
5) для указанных правых частей в одной из компьютерных математических сред найти приближение Ритца $U_{4,4}(x,y)$ для первых $4 \times 4 = 16$ базисных функций;
6) в той же математической среде визуализировать приближение Ритца, т.е. построить двумерную поверхность — график $U_{4,4}(x,y)$.

Ресурсы для решения инд. дом. задания #3

1. Материалы к практическим занятиям по теме «Вариационные проблемы уравнений в частных производных».
2. Пример решения задания #3.
3. В.И. Безяев, Р.Я. Глаголева и др. Методические указания к курсовым работам по уравнениям математической физики. М.: Изд-ва МАИ, 2000.
4. Piero Bassanini, Alan R. Elcrat. Theory and Applications of Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, 1997.
5. Комеч А.И. Практические решение уравнений математической физики. Механико-математический факультет МГУ, 1993. http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf

Номер варианта студентки / студента вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 32**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **23.05.26, 23:59**.

Список вариантов

Вариант 1.

$$\begin{cases} (1+x+y)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_x+u_y=-f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=\varphi(x),\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=2, \varphi(x)=1, L=1.$

Вариант 2

$$\begin{cases} \left(1+\cos^2 x\right)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)-u_x\sin 2x=-f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=\varphi(y),\ u_x+u\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=-\sin 2x, \varphi(y)=\sin\dfrac{\pi y}{L}, L=\pi.$

Вариант 3.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+y)u=f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u_y\big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=y^2-1, \varphi(x)=x^2-2Lx, L=1.$

Вариант 4.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(x+y)u=f(x,y), \\ -u_x+u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=0, \\ -u_y\big|_{y=0}=\varphi(x),\ u_y\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=x+y,$

$\varphi(x)=\left(-\dfrac{1}{L}-\dfrac{1}{L^2}\right)x^2+x+1, L=1.$

Вариант 5.

$$\begin{cases} (1+y)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_y=-f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=0, \\ -u_y+u\big|_{y=0}=0,\ u_y+u\big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=1, \varphi(x)=-x^2+Lx, L=1.$

Вариант 6.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+u\cos^2 x=f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=0, \\ -u_y+u\big|_{y=0}=\varphi(x),\ u_y\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=-\cos^2 x, \varphi(x)=\sin\dfrac{\pi x}{L}, L=\pi.$

Вариант 7.

$$\begin{cases} (1+x)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_x=-f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=L}=\varphi(y), \\ -u_y\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1, \varphi(y)=L^2-y^2, L=1.$

Вариант 8.

$$\begin{cases} \left(1+\cos^2 y\right)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)-u_y\sin 2y=-f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=0, \\ -u_y\big|_{y=0}=\varphi(x),\ u_y\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1, \varphi(x)=\sin\dfrac{\pi x}{L}, L=\pi.$

Вариант 9.

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1+x)u = f(x,y), \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u_x + u\big|_{x=L} = \varphi(y), \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u_y\big|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = 1 - x^2, \varphi(y) = \sin\dfrac{\pi y}{2L}, L = \pi.$

Вариант 10.

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + u = f(x,y), \\ -u_x + u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=L} = 0, \\ -u_y + 2u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u_y\big|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = x + y, \varphi(x) = -\dfrac{1}{2L}x^2 + x + 1,$
$L = 1.$

Вариант 11.

$$\begin{cases} \left(1+x^2\right)\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + 2xu_x = -f(x,y), \\ -u_x + u\big|_{x=0} = \varphi(y),\ u\big|_{x=L} = 0, \\ -u_y\big|_{y=0} = 0,\ u_y\big|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = 2x, \varphi(y) = 1, L = 1.$

Вариант 12.

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + u\sin^2 x = f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=L} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u_y + u\big|_{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y) = -\sin^2 x, \varphi(x) = \cos\dfrac{\pi x}{L}, L = \pi.$

Вариант 13.

$$\begin{cases} \left(2+\sin y\right)\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + u_y\cos y = -f(x,y), \\ -u_x + u\big|_{x=0} = 0,\ u_x + 2u\big|_{x=L} = \varphi(y), \\ -u_y\big|_{y=0} = 0,\ u_y\big|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = \cos y, \varphi(y) = \cos\dfrac{\pi y}{L}, L = \pi.$

Вариант 14.

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1+x+y)u = f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=L} = 0, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u\big|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = 1 + x + y, \varphi(x) = -\dfrac{2}{L}x^3 + 3x^2,$
$L = 1.$

Вариант 15.

$$\begin{cases} \left(1+\cos^2 y\right)\left(u_{xx} + u_{yy}\right) - u_y\sin 2y = -f(x,y), \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=L} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u_y\big|_{y=L} = \varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y) = \sin 4y, \varphi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2L}, L = \pi.$

Вариант 16.

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} + (1+xy)u = f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0} = \varphi(y),\ u\big|_{x=L} = 0, \\ -u_y + u\big|_{y=0} = 0,\ u\big|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = 1 - x^2y^2,$
$\varphi(y) = \left(-\dfrac{1}{L} - \dfrac{1}{L^2}\right)y^2 + y + 1, L = 1.$

Вариант 17.

$$\begin{cases} (1+xy)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+xu_x+yu_y=-f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=0, \\ -u_y+u\big|_{y=0}=\varphi(x),\ u_y\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1, \varphi(x)=L^2-x^2, L=1.$

Вариант 18.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+\left(\cos^2 x+\cos^2 y\right)u=f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u_y+u\big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=-\cos^2 x-\cos^2 y,$
$\varphi(x)=\cos\dfrac{\pi x}{L}, L=\pi.$

Вариант 19.

$$\begin{cases} (1+x^2+y^2)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_x+2yu_y=-f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=L}=\varphi(y), \\ -u_y\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1+2y, \varphi(y)=L^2-y^2, L=1.$

Вариант 20.

$$\begin{cases} (2+\cos y)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)-u_y\sin y=-f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=\varphi(x),\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=-\sin y, \varphi(x)=1, L=\pi.$

Вариант 21.

$$\begin{cases} (1+x+y)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_x+u_y=-f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=2, \varphi(x)=1, L=1.$

Вариант 22.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+x)u=f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=\varphi(y),\ u_x\big|_{x=L}=0, \\ -u_y\big|_{y=0}=0,\ u_y+u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1-x^2, \varphi(y)=y^2-L^2-2L,$
$L=1.$

Вариант 23.

$$\begin{cases} \left(1+\sin^2 x\right)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_x\sin 2x=-f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u_y+u\big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=\sin 2x, \varphi(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2L}, L=\pi.$

Вариант 24.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+y)u=f(x,y), \\ -u_x\big|_{x=0}=\varphi(y),\ u_x+u\big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1-y^2, \varphi(y)=-y^3+Ly^2,$
$L=1.$

Вариант 25.

$$\begin{cases} \left(1+x^2\right)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+2xu_x=-f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\Big|_{x=L}=\varphi(y), \\ -u_y+u\Big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1+3x^2,$

$\varphi(y)=\left(-\frac{1}{L}-\frac{1}{L^2}\right)y^2+y+1, L=1.$

Вариант 26.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+\cos y)u=f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\Big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u_y+u\Big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=-1-\cos y, \varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{L},$

$L=\pi.$

Вариант 27.

$$\begin{cases} \left(1+\sin^2 y\right)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_y\sin 2y=-f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x+u\Big|_{x=L}=\varphi(y), \\ -u_y\Big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=\sin 2x, \varphi(y)=\cos\frac{\pi y}{2L}, L=\pi.$

Вариант 28.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+x)u=f(x,y), \\ -u_x\Big|_{x=0}=0,\ u_x\Big|_{x=L}=0, \\ u\big|_{y=0}=0,\ u_y\Big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=1+xy, \varphi(x)=1, L=1.$

Вариант 29.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(x^2+y)u=f(x,y), \\ -u_x\Big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=0, \\ -u_y+u\Big|_{y=0}=0,\ u_y\Big|_{y=L}=\varphi(x). \end{cases}$$

$f(x,y)=x^2+y^2, \varphi(x)=L^2-x^2, L=1.$

Вариант 30.

$$\begin{cases} (1+x)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+u_x=-f(x,y), \\ -u_x\Big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=L}=\varphi(y), \\ -u_y+u\Big|_{y=0}=0,\ u_y\Big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1, \varphi(y)=-\frac{1}{2L}y^2+y+1,$

$L=1.$

Вариант 31.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+\cos x)u=f(x,y), \\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\Big|_{x=L}=0, \\ -u_y\Big|_{y=0}=\varphi(x),\ u_y\Big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=-1-\cos x, \varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2L},$

$L=\pi.$

Вариант 32.

$$\begin{cases} -u_{xx}-u_{yy}+(1+xy)u=f(x,y), \\ -u_x\Big|_{x=0}=0,\ u_x\Big|_{x=L}=\varphi(y), \\ u\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=L}=0. \end{cases}$$

$f(x,y)=1-x^2y^2, \varphi(y)=-y^2+Ly,$

$L=1.$