Листок #3: лекционные задачки по теме 3 «Пространства Соболева»

Задачка 3.1. При каких вещественных α и β функция $u(x) = |x|^\alpha \cos \beta x$ принадлежит пространству $H_0^1(-1,1)$? Ответ обосновать.

Задачка 3.2. Обозначим $H_0^1(0,\pi) = \{u \in H^1(0,\pi) : u(0) = 0,\, u(\pi) = 0\}$. Доказать, что $u \in H_0^1(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2$, где u_k — коэффициенты Фурье разложения функции u по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Выразить через коэффициенты Фурье стандартную норму $\|u\|_{H_0^1(0,\pi)}$.

Задачка 3.3. Доказать, что для любой функции $u \in H^1(0,2\pi)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leqslant 4 \int\limits_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} u(x) dx \right)^2 .$$

Задачка 3.4. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. При каких вещественных α (в зависимости от n) функция $u(x) = |x|^{-\alpha} \sin |x|$ принадлежит пространству $H^1(B)$? Ответ обосновать.

Задачка 3.5. Пусть $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ — стандартный диск, $D_+ = \{x \in D : x_2 > 0\}$, $D_- = \{x \in D : x_2 < 0\}$, $u \in C\left(\overline{D}\right)$, $u|_{D_+} \in C^1\left(\overline{D}_+\right)$, $u|_{D_-} \in C^1\left(\overline{D}_-\right)$. Доказать, что $u \in H^1(D)$.

Задачка 3.6. Обозначим через $\tilde{H}^1(0,2\pi)$ подпространство в $H^1(0,2\pi)$, состоящее из всех функций, удовлетворяющих условию $u(0) = u(2\pi)$. Доказать, что норма $\|u\|^{\prime 2}_{\tilde{H}^1(0,2\pi)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k^2+1)\,(a_k^2 + b_k^2)$, где $a_k = \int_0^{2\pi} u(x) \cos(kx) dx$, $b_k = \int_0^{2\pi} u(x) \sin(kx) dx$, эквивалентна стандартной норме пространства Соболева.

Задачка 3.7. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Верно ли следующее утверждение: существует такая постоянная $C > 0$, что для всех $u \in C^\infty\left(\overline{B}\right)$ справедливо неравенство $|u(0)| \leqslant C\|u\|_{H^1(B)}$? Ответ обосновать.

Задачка 3.8. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. При каких значениях α функция $u(x) = |x|^{-\alpha} e^{x_1 - x_2}$ принадлежит пространству $H^1(B)$? Ответ обосновать.

Задачка 3.9. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $u \in C^\infty\left(B \backslash \{0\}\right) \cap L_2(B)$. Можно ли для каких-то n утверждать, что $u \in H^1(B)$? Ответ обосновать.

Задачка 3.10. Одномерная теорема вложения Соболева утверждает, что $H^1(a,b) \subset C[a,b]$. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $n \geqslant 2$. Обязана ли функция $u \in H^1(B)$ быть эквивалентной непрерывной функции из $C\left(\overline{B}\right)$? Ответ обосновать.

Задачка 3.11. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \pi,\, x_2 > 0\}$, $u(x_1, x_2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kx_2} \sin(kx_1)$. Для каких последовательностей $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ функция $u \in H^1(\Omega)$? Дать критерий, ответ обосновать.

Задачка 3.12. Пусть $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, $u \in H^1(D)$, $u|_{\partial D} = \varphi$. Доказать, что существует такая, не зависящая от функции u, постоянная $C > 0$, что

$$\int\limits_D |u(x)|^2 dx \leqslant C \left(\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(\theta)|^2 d\theta + \int\limits_D |\nabla u(x)|^2 dx \right).$$

Задачка 3.13. Подпространство $H_0^1(\Omega)$ ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$) пространства Соболева $H^1(\Omega)$ можно определить двумя способами: 1) как замыкание пространства основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ в пространстве $H^1(\Omega)$; 2) как ядро оператора следа $\cdot|_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$. Строго доказать, что эти определения эквивалентны.

Задачка 3.14. Известно, что для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей класса C^1 существует такая константа $C = C(\Omega) > 0$, что для любой $u \in H_0^1(\Omega)$ выполнено неравенство Фридрихса

$$\int\limits_\Omega |u|^2 dx \leqslant C \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Справедливо ли неравенство Фридрихса в полосе

$$\Pi = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\, -\infty < y < \infty\right\}?$$

Ответ обосновать.

Задачка 3.15. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $u \in H^1(B)$. Возможно ли, чтобы $u \notin L_\infty(B)$ при: 1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $n = 3$? Все ответы обосновать.

Задачка 3.16. Из одномерной теоремы вложения Соболева следует, что $H_0^1(0,1) \subset C[0,1]$. Верно ли, что всякая непрерывная функция $u \in C[0,1]$, такая, что $u(0) = u(1) = 0$, принадлежит $H_0^1(0,1)$? Ответ обосновать.

Задачка 3.17. Рассмотрим в пространстве $H_0^1(-1,1)$ подпространство всех гладких функций u, удовлетворяющих условию $u'(0) + \alpha u(0) = 0$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — фиксированный коэффициент. Найти коразмерность замыкания этого подпространства в $H_0^1(-1,1)$.

Задачка 3.18. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap H^1(\Omega)$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$ (в классическом смысле). Доказать, что $u \in H_0^1(\Omega)$.

Задачка 3.19. Пусть $D = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < x_n^2,\ x_n > 0\right\}$. Доказать, что для любой константы $C > 0$ найдутся такая область $\Omega \Subset D$ и такая функция $u \in H_0^1(\Omega)$, что

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx > C \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Задачка 3.20. Привести пример ограниченной области Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$, для которой пространство всех гладких функций $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ не составляет всюду плотного подпространства в $H^1(\Omega)$. Замечание: площадь границы области должна быть равна нулю.

Задачка 3.21. Показать, что ни для какой константы $C > 0$ неравенство Фридрихса

$$\int\limits_0^\pi |u(x)|^2 dx \leqslant C \int\limits_0^\pi |u'(x)|^2 dx$$

не может выполняться для всех $u \in H^1(0, \pi)$.

Задачка 3.22. Показать, что в $H^1(0, 2\pi)$ существует подпространство размерности 2, для которого неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leqslant 4 \int\limits_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} u(x) dx \right)^2$$

превращается в равенство. Найти это подпространство и доказать, что для функций из $H^1(0, 2\pi)$, ему не принадлежащих, неравенство Пуанкаре строгое.

Задачка 3.24. Обозначим через $\tilde{H}^1(0, 2\pi) = \{u \in H^1(0, 2\pi) : u(0) = u(2\pi)\}$. Доказать, что для любой функции $u \in \tilde{H}^1(0, 2\pi)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} u(x) dx \right)^2.$$

Задачка 3.25. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Показать, что

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u(x) dx = 0 \right\}$$

есть замкнутое подпространство в $H^1(\Omega)$, а форма $(u, v)' = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ задаёт скалярное произведение в $\tilde{H}^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной.

Задачка 3.26. Определим пространство $H^s(\mathbb{T}^1)$ ($\mathbb{T}^1$ — окружность, $s \geqslant 0$) как множество всех комплекснозначных функций $\varphi \in L_2(\mathbb{T}^1)$, для которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |k|^{2s} |\varphi_k|^2$, где $\varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-ikx} dx$ — k-ый коэффициент Фурье. Покажите, что при любом $s \geqslant 0$ пространство $H^s(\mathbb{T}^1)$ гильбертово относительно скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2s} \varphi_k \overline{\psi}_k.$$