Уравнения в частных производных

Эллиптические операторы второго порядка

А.Е. Байков

к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ

https://baikov.org/pde

Содержание

1. Вариационный метод. Обобщённые решения краевых задач
2. Корректность краевых задач: однозначная и фредгольмова разрешимость
3. Спектр и собственные функции эллиптических операторов

Эллиптические операторы второго порядка

- Эллиптический оператор в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\mathscr{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

где $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ — известные коэффициенты, матрица старших коэффициентов $A(x) = \Big(a_{ij}(x)\Big)_{i,j=1}^{n}$ положительно (или отрицательно) определена: для любой $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, $\xi^T A(x)\xi > 0$ (или $\xi^T A(x)\xi < 0$).

- Эллиптический оператор $\mathscr{L}$ *равномерно эллиптичен* в области Ω, если существует $\gamma > 0$, что для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

Дивергентные эллиптические операторы

$$\xi^T A(x)\xi \geqslant \gamma |\xi|^2 \ (\xi^T A(x)\xi \leqslant -\gamma |\xi|^2).$$

- Эллиптический оператор $\mathscr{L}$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *дивергентным*, если его можно представить в виде

$$\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u,$$

где $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T$ — градиент, $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial a_n}{\partial x_n}$ — дивергенция векторного поля $\vec{a} = a_1(x)\vec{e}_1 + \ldots + a_n(x)\vec{e}_n$. Отдельного рассмотрения заслуживают дивергентные операторы вида $\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(p(x)\nabla u\right) + c(x)u$, где $p, c \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ — известные функции, $p(x) \geqslant p_0 > 0$ (нужно для равномерной эллиптичности).

В предчувствии вариационного метода: внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Для гипотетического классического решения $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ (обратите внимание на сужение обычного пространства класс. решений) рассмотрим *функционал энергии*

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - 2\int_\Omega f(x)u dx. \quad (4.2)$$

Как он связан с задачей (4.1)?

Экстремаль функционала энергии

Предположим, что на множестве функций $\left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right) : u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$ мы нашли глобальную *экстремаль* $u^\star$ функционала энергии, доставляющую ему глобальный минимум: для всех $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right),\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi,$ $E\left(u^\star\right) \leqslant E(u)$. Покажем, что экстремаль $u^\star$ удовлетворяет задаче Дирихле (4.1), при условии, что $u^\star \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Для этого рассмотрим функцию $\delta u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right), \delta u\Big|_{\partial\Omega} = 0$ (*вариацию экстремали*), число $t \in \mathbb{R}$, и найдём приращение функционала энергии. Имеем

Приращение функционала энергии

$$0 \leqslant E\left(u^\star + t\delta u\right) - E\left(u^\star\right) = \int_\Omega \left(\nabla u^\star + t\nabla\delta u\right)\cdot\left(\nabla u^\star + t\nabla\delta u\right)dx -$$

$$-2\int_\Omega f(x)\left(u^\star + t\delta u\right)dx - \int_\Omega \nabla u^\star\cdot\nabla u^\star dx + 2\int_\Omega f(x)u^\star dx =$$

$$= t^2\int_\Omega \left|\nabla\delta u\right|^2 dx + 2t\int_\Omega \left(\nabla u^\star\cdot\nabla\delta u - f(x)\delta u\right)dx -$$

квадратичная функция от $t \Rightarrow$ для всех δu

$$\int_\Omega \left(\nabla u^\star\cdot\nabla(\delta u) - f(x)\delta u\right)dx = 0. \quad (4.3)$$

(4.3) — необходимое условие экстремали.

Лемма Дюбуа-Реймона

Вспомним первую формулу Грина

$$\int_\Omega v\Delta u^\star\,dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u^\star}{\partial\vec{\nu}}\,ds - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u^\star\,dx$$

($v = \delta u$) и преобразуем интегральное равенство (4.3), учитывая $\delta u\big|_{\partial\Omega} = 0$: $\int_\Omega \left(-\Delta u^\star - f(x)\right)\delta u dx = 0.$

Лемма 4.1 (непрерывная версия леммы Дюбуа-Реймона). Пусть $u \in C(\Omega)$ и для любой $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ (финитной бесконечно дифференцируемой функции) $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$. Тогда $u(x) = 0$ в Ω.

Уравнение Эйлера—Лагранжа

Действительно, если $u\left(x^0\right) \neq 0$, например, $u\left(x^0\right) > 0$, то существует окрестность $U\left(x^0\right) \Subset \Omega$ и для всех $x \in U\left(x^0\right)$ $u(x) > 0$. Но тогда можно взять функцию $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$, $\varnothing \neq \operatorname{supp}\varphi \Subset U\left(x^0\right)$ и $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx > 0$, что противоречит условиям леммы.

Итак, $-\Delta u^\star - f(x) = 0 \Leftrightarrow -\Delta u^\star = f(x), x \in \Omega$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала энергии (4.2). Следовательно, его экстремаль — решение задачи Дирихле (4.1) из пространства $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Проблемы вариационного метода

Основные проблемы вариационного метода.

1) Существует ли экстремаль функционала энергии?
2) Как построить экстремаль функционала энергии?
3) Как устроены функционалы энергии других краевых задач?

К сожалению (или к счастью), для положительного ответа на первый вопрос функциональное пространство $C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ и другие классические функциональные пространства с заданными на них структурами совершенно не подходят, нужны полные пространства — пространства Соболева, уже изученные в первой теме весеннего семестра.

Евклидовы пространства

Определение 4.1. Пусть H — линейное пространство с произвольной природой элементов. Форма $(\,\cdot\,,\cdot\,) : H \times H \to \mathbb{R}$ называется *скалярным произведением* в H, если она удовлетворяет аксиомам:

(i) для любых $u, v, w \in H$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$, $(\lambda u, w) = \lambda(u, w)$ (линейность по первому элементу);

(ii) для любых $u, v \in H$ $(u, v) = (v, u)$ (симметричность);

(iii) для любого $u \in H, u \neq 0$, $(u, u) > 0$ (позитивность).

Пара $\big(H, (\,\cdot\,,\cdot\,)\big)$ называется *евклидовым пространством*.

Примеры евклидовых пространств

Рассмотрим примеры евклидовых пространств.

1. Координатное пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярными произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
2. Пространство $CL_2\left(\overline{\Omega}\right)$, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, состоящее из всех непрерывных функций в $\overline{\Omega}$, со скалярным произведением
$$(u, v)_{CL_2(\overline{\Omega})} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$
3. Пространство $C^k L_2\left(\overline{\Omega}\right)$, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, состоит из всех k раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, скалярно произведение
$$(u, v)_{C^k L_2(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx.$$

Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши—Буняковского

4. Пространство l_2, состоящее из всех квадратично суммируемых последовательностей: $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

   Скалярное произведение в l_2: $(x, y)_{l_2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.

Утверждение 4.1. Пусть H — евклидово пространство, тогда любые $u, v \in H$ удовлетворяют *неравенству Коши—Буняковского*

$$|(u, v)|^2 \leqslant (u, u)(v, v), \quad (4.4)$$

причём знак равенства имеет место только в том случае, когда элементы u, v линейно зависимы.

Евклидова норма

Доказательство. Если $v = 0$, то неравенство (4.4) очевидно. Фиксируем $u, v \in H$, $v \neq 0$, и рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = (u + tv, u + tv) = (v, v)t^2 + 2(u, v)t + (u, u) \geqslant 0$. Поскольку $f(0) = (u, u) \geqslant 0$, дискриминант не должен быть больше нуля: $4\,|(u, v)|^2 - 4(u, u)(v, v) \leqslant 0 \Rightarrow$ неравенство (4.4). Дискриминант равен нулю ((4.4) обращается в равенство) $\Leftrightarrow \exists t_*\ u + t_* v = 0$. Утверждение 4.1 доказано.

Пусть H — евклидово пространство, тогда функционал $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ есть норма в H, она называется *евклидовом нормой*. Однородность и невырожденность евклидовой нормы очевидны.

Тождество параллелограмма

Получим неравенство треугольника:
$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) \leqslant \|u\|^2 +$
$+2|(u,v)| + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = \big(\|u\| + \|v\|\big)^2 \Rightarrow$
$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$. Мы применили неравенство Коши—Буняковского, представленное в виде $|(u,v)| \leqslant \|u\|\|v\|$.
Таким образом, евклидовы пространства имеют естественную нормировку. Верно ли обратное, т.е. всякую ли норму можно таким образом породить скалярным произведением?
Утверждение 4.2. Пусть N — нормированное пространство. Норма $\|\cdot\|$ тогда и только тогда порождена скалярным произведением,

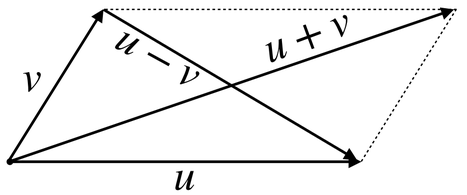
Тождество параллелограмма

когда для любых $u, v \in N$ справедливо *тождество параллелограмма*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right). \quad (4.5)$$

Для евклидовой нормы тождество (4.5) элементарно проверяется. Предположим, что норма удовлетворяет тождеству (4.5).

Положим $(u, v) = \dfrac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$.



Позитивность и симметричность очевидны, линейность нужно проверять (упражнение).

Пример: $C(K)$, где $K \Subset \mathbb{R}^n$ — компакт, — нормированное, но евклидово пространство.

Линейные функционалы

Отвлечёмся пока от евклидовых пространств.

Определение 4.2. Пусть N — нормированное пространство. Функционал $l : N \to \mathbb{R}$ называется *линейным*, если для любых $u, v \in N$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ 1) $l(u + v) = l(u) + l(v)$ (аддитивность); 2) $l(\lambda u) = \lambda l(u)$ (однородность).

Обозначение: $\langle l, u \rangle := l(u)$.

Утверждение 4.3. Следующие свойства линейного функционала эквивалентны:

(i) *непрерывность по Гейне*: для любой последовательности $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N$, сходящейся в N к элементу $u^\star \in N$, $\langle l, u_j - u^\star \rangle \to 0$, $j \to \infty$;

Норма ограниченного линейного функционала

(ii) *ограниченность*: существует константа $C \geqslant 0$, что для всех $u \in N$ $|\langle l, u\rangle| \leqslant C\|u\|$.

Доказательство. Сначала заметим, что непрерывность по Гейне достаточно проверять для последовательностей, сходящихся к нулевому элементу. Тогда (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидно. Для доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) рассмотрим величину $\|l\|^* = \sup\limits_{\|u\|\leqslant 1} \left|\langle l, u\rangle\right|$ (супремум по всем элементам $u \in N$ с нормой $\leqslant 1$). Если $\|l\|^* = \infty$, то существует последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N$, $\|u_j\| \leqslant 1$, $\left|\langle l, u_j\rangle\right| > j^2$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Сопряжённое пространство

Положим $v_j = \dfrac{u_j}{j}$, тогда $\|v_j\| = \dfrac{1}{j}\|u_j\| \to 0, j \to \infty$, т.е. $v_j \to 0$ в N. Но $\left|\langle l, v_j\rangle\right| > j$, поэтому $\langle l, v_j\rangle$ не стремится к нулю, что противоречит непрерывности функционала. Можно взять $C = \|l\|^*$. Утверждение 4.3 доказано.

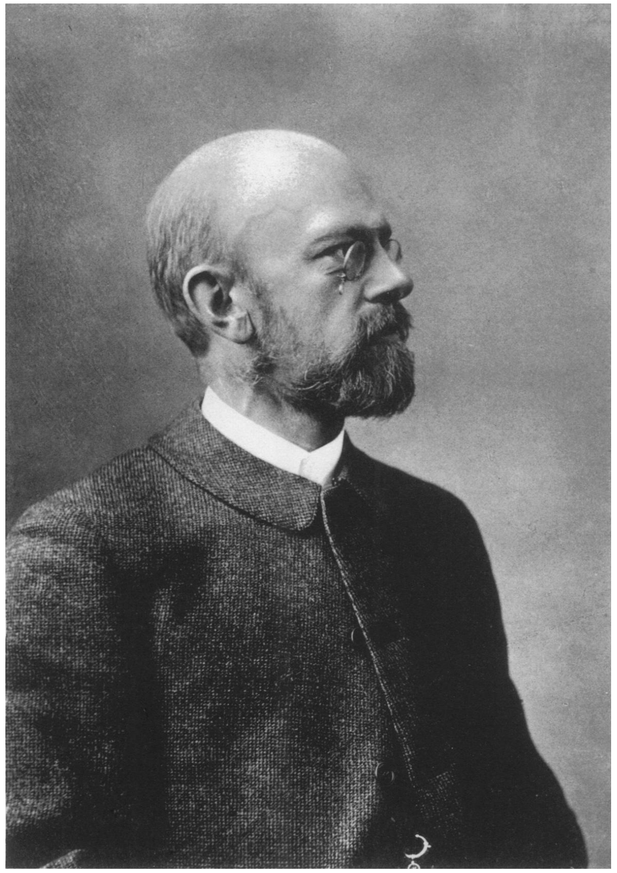
$\|l\|^* = \sup\limits_{\|u\|\leqslant 1} \left|\langle l, u\rangle\right|$ — норма ограниченного линейного функционала.

Определение 4.3. Пусть N — нормированное пространство. Тогда множество всех ограниченных линейных функционалов над N вместе с $\|\cdot\|^*$ образует нормированное пространство N^* — *сопряжённое* к N.

Гильбертовы пространства

Определение 4.4. Евклидово пространство H называется *гильбертовым*, если оно полное относительно нормы, порождённой скалярным произведением.

- $\mathbb{R}^n$ — конечномерное гильбертово пространство;
- l_2 — бесконечномерное гильбертово пространство;
- Норма евклидовых пространств $CL_2\left(\overline{\Omega}\right), C^kL_2\left(\overline{\Omega}\right)$ не полна…



David Hilbert (1862 – 1943)

Абстрактный функционал энергии

Пусть H — гильбертово пространство, $(\cdot\,,\cdot)'$ — билинейная симметрическая форма в H, такая, что существуют константы $\alpha > 0, \beta > 0$, и для любого $u \in H$ $(u,u)' \leqslant \alpha^2(u,u)$ и $(u,u) \leqslant \beta^2(u,u)'$, где $(\cdot\,,\cdot)$ — естественное скалярное произведение в H. Рассмотрим также ограниченный линейный функционал $l \in H^*$, обозначим $\langle l,u\rangle = l(u), u \in H$. Будем работать с функционалом энергии $E(u) = (u,u)' - 2\langle l,u\rangle$.

Поставим вариационную проблему

$$E(u) = (u,u)' - 2\langle l,u\rangle \to \min, u \in H. \quad (4.6)$$

Теорема об экстремали

Теорема 4.1. Пусть H — гильбертово пространсво. Существует единственный элемент $u^\star \in H$, называемый *экстремалью*, минимизирующий функционал энергии E, т.е. $\exists!$ решение вариационной проблемы (4.6).

Доказательство. Шаг 1. Обозначим $\sqrt{(u,u)'} = \|u\|'$, $(u,u) = \|u\|^2$. Покажем, что функционал энергии ограничен снизу:

$$E(u) = \|u\|'^2 - 2\langle l,u\rangle \geqslant \|u\|'^2 - 2\,|\langle l,u\rangle| \geqslant \|u\|'^2 - 2\|l\|^*\|u\| \geqslant$$
$$\geqslant \|u\|'^2 - 2\beta\|l\|^*\|u\|' = \left(\|u\|' - \beta\|l\|^*\right)^2 - \beta^2\|l\|^{*2} \geqslant -\beta^2\|l\|^{*2}.$$

Теорема об экстремали: доказательство

Обозначим $\mu = \inf\limits_{u \in H} E(u)$. По определению точной нижней грани существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, для которой $E(u_k) \to \mu$ при $k \to \infty$. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ назовём *минимизирующей*.

Шаг 2. Покажем, что всякая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна. По определению предела имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant N$ $\mu \leqslant E(u_k) \leqslant \mu + \varepsilon$. Так как

$$\left\| \frac{u_k + u_j}{2} \right\|'^2 + \left\| \frac{u_k - u_j}{2} \right\|'^2 = \frac{1}{2} \left(\|u_k\|'^2 + \|u_j\|'^2 \right),$$

Теорема об экстремали: доказательство

получим $\left\| \dfrac{u_k - u_j}{2} \right\|'^2 = \dfrac{1}{2}\left(\|u_k\|'^2 + \|u_j\|'^2 \right) - \left\| \dfrac{u_k + u_j}{2} \right\|'^2 =$

$= \dfrac{1}{2}\left(E(u_k) + E(u_j) \right) - E\left(\dfrac{u_k + u_j}{2} \right)$. Но $E\left(\dfrac{u_k + u_j}{2} \right) \geqslant \mu$, поэтому при любых $k, j \geqslant N$

$$0 \leqslant \left\| \frac{u_k - u_j}{2} \right\|'^2 \leqslant \frac{1}{2}(\mu + \varepsilon + \mu + \varepsilon) - \mu = \varepsilon \Rightarrow$$

$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность.

Шаг 3. В силу полноты H существует $\lim\limits_{k \to \infty} u_k = u^\star \in H$ всякой минимизирующей последовательности.

Теорема об экстремали: доказательство

Покажем, что $E\left(u^{\star}\right)=\mu$, т.е. $u^{\star} \in H$ — решение вариационной проблемы (4.6). Действительно, $\|u_k\|^{\prime 2} \rightarrow \|u^{\star}\|^{\prime 2}$ при $k \rightarrow \infty$ (упражнение), $\langle l, u_k\rangle \rightarrow \langle l, u^{\star}\rangle, k \rightarrow \infty$, поэтому $E(u_k) \rightarrow E(u^{\star})=\mu$ при $k \rightarrow \infty$.

Шаг 4. Докажем единственность экстремали. Пусть $\tilde{u} \in H$ — другая экстремаль. Тогда последовательность $u^{\star}, \tilde{u}, u^{\star}, \tilde{u}, \ldots$ минимизирует функционал энергии $\Rightarrow$ она фундаментальная $\Rightarrow$ $u^{\star}=\tilde{u}$. Теорема 4.1 доказана.

Необходимое условие экстремали

Утверждение 4.4. Пусть $u^\star \in H$ — экстремаль функционала энергии $E(u) = (u,u)' - 2\langle l, u\rangle$. Тогда для любого $\delta u \in H$ (вариации экстремали)

$$(u^\star, \delta u)' - \langle l, \delta u\rangle = 0. \quad (4.7)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную вариацию $\delta u \in H$, произвольное число $t \in \mathbb{R}$, найдём приращение функционала энергии:

$$0 \leqslant E\left(u^\star + t\delta u\right) - E\left(u^\star\right) = \left(u^\star + t\delta u, u^\star + t\delta u\right)' -$$
$$-2\langle l, u^\star + t\delta u\rangle - \left(u^\star, u^\star\right)' + 2\langle l, u^\star\rangle = (\delta u, \delta u)' t^2 +$$
$$+2t\left(\left(u^\star, \delta u\right)' - \langle l, \delta u\rangle\right) \Rightarrow \left(u^\star, \delta u\right)' - \langle l, \delta u\rangle = 0$$ для любой $\delta u \in H$, что и требовалось доказать.

Сепарабельные гильбертовы пространства

Пусть H — гильбертово пространство.

1) Система $\{e_j\}_{j\in J} \subset H$ называется *линейно независимой*, если линейно независима любая конечная подсистема в ней.
2) *Линейной оболочкой* системы $\{e_j\}_{j\in J} \subset H$ называется множество всех конечных линейных комбинаций её элементов, обозначение $\mathrm{Lin}\{e_j\}_{j\in J}$.
3) Система $\{e_j\}_{j\in J} \subset H$ называется *тотальной* в H, если её линейная оболочка *всюду плотна* в H: для любого $\varepsilon > 0$ и любого $u \in H$ существуют $m \in \mathbb{N}, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, $\left\| u - \left(c_1 e_1 + \ldots + c_m e_m\right) \right\|_H < \varepsilon$.
4) Гильбертово пространство H называется *сепарабельным*, если в нём существует тотальная не более чем счётная система элементов.

Сепарабельные гильбертовы пространства

Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Система ненулевых элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется *ортогональным* (*ортонормированным*) *базисом* в H, если:

i) для любых $j, k \in \mathbb{N}, j \neq k, (e_j, e_k) = 0$ (кроме того, для любого $j \in \mathbb{N}$ $\|e_j\| = 1$);

ii) $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ тотальна в H.

Пример. В пространстве l_2 рассмотрим систему $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящую из последовательностей $e_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (единица на j-ой позиции). Легко видеть, что эта система есть ортонормированный базис в l_2.

$l_2 \ni x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots$

Абстрактные ряды Фурье

Утверждение 4.5. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в H, тогда любой элемент $u \in H$ единственный образом представим в виде (*абстрактного*) *ряда Фурье*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j,$$

сходящегося в H, причём *коэффициенты Фурье* $c_j = \dfrac{(u, e_j)}{(e_j, e_j)}$,

$(\|e_j\| c_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2$, и выполнено *равенство Парсеваля* $\|u\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^2 |c_j|^2$.

Метод Ритца

Изложим *метод Ритца* построения минимизирующей функционал $E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u\rangle$ последовательности.

Возьмём в сепарабельном пространстве H *базис* $\{e_1, e_2, \ldots\}$.
Обозначим $H_m = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_m), H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$.
Рассмотрим конечномерную вариационную проблему (задачу оптимизации) вида

$$E(u) = (u, u)' - 2\langle l, u\rangle \to \min, u \in H_m. \quad (4.8)$$

Преобразуем функционал энергии, полагая $u = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k$:

Метод Ритца

$E(u) = \sum_{k,j=1}^{m} (e_k, e_j)' c_k c_j - 2 \sum_{k=1}^{m} \langle l, e_k \rangle c_k$ Пусть:

- $G_m = \left((e_k, e_j)' \right)_{k,j=1}^{m}$ — матрица Грама элементов $e_1, \ldots, e_m$;
- $b^{(m)} = \left(\langle l, e_1 \rangle, \ldots, \langle l, e_m \rangle \right)^T$ — известный столбец;
- $c = \left(c_1, \ldots, c_m \right)^T$ — столбец переменных.

Тогда для $c \in \mathbb{R}^m$ имеем $E_m(c) = c^T G_m c - 2 c^T b^{(m)}$. Так как матрица Грама G_m положительно определена, то задача (4.8) имеет единственное решение, которое можно найти по формуле $c^{(m)} = G_m^{-1} b^{(m)}$.

Метод Ритца: сходимость минимизирующей последовательности

В самом деле, необходимое условие экстремума квадратичной функции $\mathbb{R}^m \ni c \mapsto E_m(c) = c^T G_m c - 2c^T b^{(m)}$ имеет вид $2G_m c^{(m)} - 2b^{(m)} = \nabla E_m\left(c^{(m)}\right) = 0$, а поскольку $G_m > 0$, то $c^{(m)} = G_m^{-1} b^{(m)}$ и выполнено достаточное условие минимума: $d^2 E_m = 2dc^T G_m dc > 0$.

Мы построили последовательность $u_m = c_1^{(m)} e_1 + \ldots + c_m^{(m)} e_m$, которая называется *последовательностью Ритца*.

Утверждение 4.6. Последовательность Ритца сходится к экстремали $u^\star$ функционала энергии.

Метод Ритца: сходимость минимизирующей последовательности

Доказательство. Имеем $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$, откуда следует, что $E(u_1) \geqslant E(u_2) \geqslant \ldots$ Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и $c_1'(\varepsilon), \ldots, c_m'(\varepsilon)$, что $\|u^\star - u_m'(\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon$, где $u_m'(\varepsilon) = c_1'(\varepsilon)e_1 + \ldots + c_m'(\varepsilon)e_m$. Можно показать (упражнение): существует константа $C > 0$,

Walther Ritz (1878 – 1909)

Метод Ритца: сходимость минимизирующей последовательности

не зависящая от ε и, следовательно, m, что выполнено неравенство $E\left(u'_m(\varepsilon)\right) \leqslant \mu + C\varepsilon$, где $\mu = E\left(u^\star\right)$. Но $\operatorname{argmin}_{u \in H_m} E(u) = u_m$, поэтому для всех $k \geqslant m$, $\mu \leqslant E(u_k) \leqslant \mu + C\varepsilon \Rightarrow E(u_k) \to \mu$, если $\varepsilon \to 0$, т.е. $k \to \infty \Rightarrow$ $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность. Утверждение 4.6 доказано.

Функционал энергии задачи Дирихле

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения с дивергентным оператором $\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Функционал энергии задачи (4.9) имеет вид

$$E_D(u) = b_{\mathscr{L}}(u,u) - 2\int_\Omega f(x)u\,dx, \tag{4.10}$$

где $b_{\mathscr{L}}(u,v) = \int_\Omega \left(A(x)\nabla u\cdot\nabla v + c(x)uv\right)dx$ — симметрическая билинейная форма, ассоциированная с оператором $\mathscr{L}$.

Экстремаль функционала энергии задачи Дирихле

Утверждение 4.7. Предположим, что функционал энергии (4.10) имеет глобальную экстремаль $u^\star$, доставляющую ему минимум на множестве $\left\{ u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) : u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$, причём $u^\star \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Тогда $u^\star$ есть решение задачи (4.9).

Доказательство. Повторяя рассуждения из начала темы, но уже для оператора $\mathscr{L}$, получим для любой вариации $\delta u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\delta u\big|_{\partial\Omega} = 0$, необходимое условие экстремали в виде

$$\int_\Omega \left(A(x)\nabla u^\star \cdot \nabla \delta u + c(x) u^\star \delta u \right) dx - \int_\Omega f(x)\delta u dx = 0. \quad (4.11)$$

Модифицированный функционал энергии

Применяя один раз формулу интегрирования по частям, получим из (4.11) $\int_\Omega \left(\mathscr{L}u^\star - f(x)\right)\delta u dx = 0$, в частности, для любой вариации $\delta u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Отсюда по лемме 4.1 $\mathscr{L}u^\star = f$ в Ω. Утверждение 4.7 доказано.

Рассмотрим всё пространство $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, не предполагая, что функции удовлетворяют условию Дирихле на границе, и определим на нём *модифицированный функционал энергии*

$$\tilde{E}_D(u) = b_{\mathscr{L}}(u,u) + \int_{\partial\Omega} \left| u\big|_{\partial\Omega} - \varphi(x)\right|^2 ds - 2\int_\Omega f(x)u dx.$$

Нетрудно показать, что экстремаль функционала $\tilde{E}_D$ на $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ совпадает с экстремалью функционала (4.10) на $\left\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) : u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\right\}$.

Функционал энергии задачи Робена

Рассмотрим внутреннюю задачу Робена для уравнения с дивергентным оператором $\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{4.12}$$

где $\sigma \in C(\partial\Omega)$. С задачей (4.12) свяжем функционал энергии вида

$$E_R(u) = W(u,u) - 2\left(\int_\Omega f(x)u\,dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u\Big|_{\partial\Omega} ds\right), \tag{4.13}$$

Экстремаль функционала энергии задачи Робена

где W — симметрическая билинейная форма Робена, имеющая вид

$$W(u,v) = \int_\Omega \left(A(x)\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv\right) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u\big|_{\partial\Omega} v\big|_{\partial\Omega} ds.$$

Утверждение 4.8. Предположим, что функционал энергии (4.13) имеет глобальную экстремаль $u^\star$, доставляющую ему минимум в пространстве $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, причём $u^\star \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда $u^\star$ — решение задачи (4.12).

Доказательство. Обозначим $\langle l, u\rangle = \int_\Omega f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) u\big|_{\partial\Omega} ds.$

Рассмотрим вариацию $\delta u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, число $t \in \mathbb{R}$, тогда приращение функционала энергии (4.13)

Экстремаль функционала энергии задачи Робена

$$0 \leqslant E\left(u^\star + t\delta u\right) - E\left(u^\star\right) = W(\delta u, \delta u)t^2 + 2t\left(W\left(u^\star, \delta u\right) - \langle l, \delta u\rangle\right).$$

Отсюда для любой $\delta u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ $W(u^\star, \delta u) - \langle l, \delta u\rangle = 0$, т.е.

$$\int_\Omega \left(A(x)\nabla u^\star \cdot \nabla(\delta u) + c(x)u^\star \delta u - f(x)\delta u\right) dx +$$

$$+\int_{\partial\Omega}\left(\sigma(x)u^\star\Big|_{\partial\Omega}\delta u\Big|_{\partial\Omega} - \varphi(x)\delta u\Big|_{\partial\Omega}\right) ds = 0.$$ Применяя один раз формулу интегрирования по частям, получим

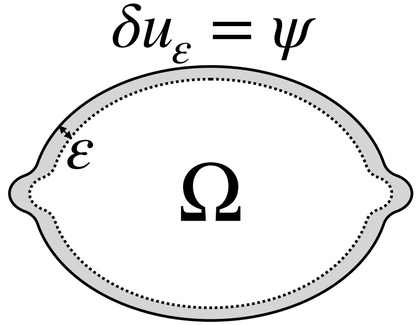
$$\int_\Omega \left(\mathscr{L}u^\star - f(x)\right)\delta u dx + \int_{\partial\Omega}\left(A(x)\nabla u^\star \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u^\star - \varphi(x)\right)\delta u\Big|_{\partial\Omega} ds = 0. \tag{4.14}$$

Экстремаль функционала энергии задачи Робена

1) Имеем для любой $\delta u \in C_0^\infty(\Omega)$ $\int_\Omega \left(\mathscr{L}u^\star - f(x)\right)\delta u dx = 0$. По лемме Дюбуа-Реймона $\mathscr{L}u^\star - f(x) = 0$ в Ω. Получили уравнение задачи Робена (4.12).

Лемма 4.2 (о поднятии). Пусть $\psi \in C^1(\partial\Omega)$ — произвольная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\delta u_\varepsilon \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ со свойствами:

а) $\delta u_\varepsilon\Big|_{\partial\Omega} = \psi$; б) для любой $x \in \operatorname{supp}\delta u_\varepsilon$ $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon$; в) $\|\delta u_\varepsilon\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_\psi$.



Экстремаль функционала энергии задачи Робена

В частности, мера (n-мерный объём) носителя $\operatorname{supp} \delta u_\varepsilon$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Функция δu_ε называется *поднятием* ψ.

2) Пусть $\psi \in C^1(\partial\Omega)$, $\delta u_\varepsilon \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ — её поднятие, тогда справедлива оценка $\left| \int_\Omega \left(\mathscr{L} u^\star - f(x)\right) \delta u_\varepsilon dx \right| \leqslant C_\psi \max\limits_{\overline{\Omega}} \left| \mathscr{L} u^\star - f \right| \cdot$

$\cdot \operatorname{mes}\left(\operatorname{supp} \delta u_\varepsilon\right) \to 0, \varepsilon \to 0$. Следовательно, предельный переход в формуле (4.14), записанной для δu_ε, даёт

$\int_{\partial\Omega} \left(A(x) \nabla u^\star \cdot \vec{\nu} + \sigma(x) u^\star - \varphi(x)\right) \psi ds = 0$ для любой $\psi \in C^1(\partial\Omega)$. Но тогда по лемме Дюбуа-Реймона $A(x) \nabla u^\star \cdot \vec{\nu} + \sigma(x) u^\star \Big|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Сильные решения краевых задач

Снова рассмотрим задачу Дирихле для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Обозначим граничный оператор краевой задачи (4.9) (оператор следа) через $\mathscr{B}$, а саму задачу — через $\{\mathscr{L}, \mathscr{B}\}$. Рассмотрим оператор

$$L : H^2(\Omega) \to L_2(\Omega) \oplus H^{3/2}(\partial\Omega),$$

действующий на функции из $H^2(\Omega)$ следующим образом:
$H^2(\Omega) \ni u \mapsto (\mathscr{L}u, \mathscr{B}u) \in L_2(\Omega) \oplus H^{3/2}(\partial\Omega)$, где $H^{3/2}(\partial\Omega)$ — образ оператора следа $\cdot\,\big|_{\partial\Omega} : H^2(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$.

Сильные решения краевых задач

Тогда *сильным решением* задачи Дирихле (4.9) с правыми частями $f \in L_2(\Omega), \varphi \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ будем называет такую функцию $u \in H^2(\Omega)$, что $Lu = (f, \varphi)$.

Для задачи Робена (4.12) рассмотрим оператор $H^2(\Omega) \ni u \mapsto Lu = \left(\mathscr{L}u, \mathscr{B}u\right) \in L_2(\Omega) \oplus L_2(\partial\Omega)$, где граничный оператор $\mathscr{B}u = A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u\Big|_{\partial\Omega}$. *Сильным решением* задачи Робена (4.12) с правыми частями $f \in L_2(\Omega), \varphi \in L_2(\partial\Omega)$ будем называет такую функцию $u \in H^2(\Omega)$, что $Lu = (f, \varphi)$.

Проблема: из вариационной теории не следует, что краевые задачи имеют сильные решения…

Формула интегрирования по частям

Основные инструментом исследования краевых задач, как и прежде, служит формула интегрирования по частям теперь для функций из пространства Соболева.

Утверждение 4.9. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u, v \in H^1(\Omega)$, $\vec{\nu}$ — поле единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\big|_{\partial\Omega} v\big|_{\partial\Omega} \nu_j ds - \int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_j} dx. \quad (4.15)$$

Действительно, по теореме о плотности (пространство $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ всюду плотно в $H^1(\Omega)$, если $\partial\Omega \in C^1$) существуют последовательности $\{u_k\}$, $\{v_k\} \subset C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, сходящиеся в $H^1(\Omega)$ к u, v, соотвественно.

Первая формула Грина

Но тогда, очевидно, можно сделать предельный переход в классической формуле интегрирования по частям и получить формулу (4.15).

Из формулы интегрирования по частям следует *первая формула Грина* для дивергентного оператора $\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u$ в пространстве Соболева:

$$\int\limits_{\Omega} v\mathscr{L}u dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \left(A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}\right) v ds + b_{\mathscr{L}}(u, v). \quad (4.16)$$

Здесь: $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}$ — A-нормальная производная,

Определение обобщённых решений: дивергентные операторы

$b_{\mathscr{L}}(u,v) = \int_{\Omega} \left(A(x)\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv \right) dx$ — симметрическая билинейная форма, ассоциированная с оператором $\mathscr{L}$.

Существуют два способа определить обобщённые решения задачи Дирихле для уравнения с дивергентным оператором

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi : \end{cases} \qquad (4.9)$$

1) Обобщённое решение — это функция $u \in H^1(\Omega)$, $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$, удовлетворяющая необходимому условию экстремали функционала энергии (4.10).

Определение обобщённых решений: дивергентные операторы

2) Применить к сильному решению $u \in H^2(\Omega)$ первую формулу Грина (4.16), интерпретировать результат как определение обобщённого решения $u \in H^1(\Omega)$ задачи Дирихле (4.9).

Определение 4.5. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Дирихле (4.9) для дивергентного равномерно эллиптического уравнения второго порядка, если $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ и с любой *пробной функцией* $\delta u = v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство

$$b_{\mathscr{L}}(u, v) = \int_{\Omega} f(x) v dx. \quad (4.17)$$

Обобщённое решение задачи Робена

Рассмотрим теперь задачу Робена (4.12). Ещё раз выпишем $W(u,v) = b_{\mathscr{L}}(u,v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u\big|_{\partial\Omega} v\big|_{\partial\Omega} ds$ — симметрическую билинейную форму Робена.

Определение 4.6. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Робена (4.12), если для любой *пробной функции* $\delta u = v \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство

$$W(u,v) = \int_\Omega f(x) v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v\big|_{\partial\Omega} ds. \quad (4.18)$$

Общий равномерно эллиптический оператор

Приступаем к определению обобщённых решений краевых задач для общего равномерно эллиптического оператора второго порядка, представленной в дивергентной форме

$$\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + \operatorname{div}\left(\vec{b}(x)u\right) + c(x)u, \quad (4.19)$$

где переменная матрица A и функция c такие же, как и для дивергентного оператора, т.е. $A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$ равномерно положительно определена, $a_{ij} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $c \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + \ldots + b_n\vec{e}_n$, $b_j \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Формально сопряжённый оператор

Формально сопряжённый оператор к оператору (4.19) имеет вид

$$\mathscr{L}^* v = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) - \vec{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u =$$
$$= -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) - \operatorname{div}\left(\vec{b}(x)u\right) + \left(c(x) + \operatorname{div}\vec{b}(x)\right)u.$$

Умножим эллиптическое уравнение $\mathscr{L}u = f$ на пробную функцию $v \in H^1(\Omega)$, проинтегрируем по области Ω и преобразуем левую часть с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int_\Omega \left(A(x)\nabla u\cdot\nabla v + c(x)uv\right)dx - \int_\Omega u\left(\vec{b}(x)\cdot\nabla v\right)dx +$$
$$+\int_{\partial\Omega} uv\vec{b}(x)\cdot\vec{\nu}ds - \int_{\partial\Omega}\left(A(x)\nabla u\cdot\vec{\nu}\right)vds = \int_\Omega f(x)vdx. \quad (4.20)$$

Определение обобщённого решения задачи Дирихле

Снова введём обозначение: $b_{\mathscr{L}}(u,v) = \int_\Omega \left(A(x)\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv\right) dx.$

Пусть $v\big|_{\partial\Omega} = 0$, тогда интегральное равенство (4.20) примет вид

$$b_{\mathscr{L}}(u,v) - \int_\Omega u\left(\vec{b}(x)\cdot\nabla v\right) dx = \int_\Omega f(x)v dx. \quad (4.21)$$

Определение 4.7. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Дирихле (4.9) с общим равномерно эллиптическим оператором (4.19), если $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$, и для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено равенство (4.21).

Определение обобщённого решения задачи Робена

Из краевого условия Робена следует, что $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) - \sigma(x)u\Big|_{\partial\Omega}$.

Подставим в интегральное равенство (4.20) выражение для A- нормальной производной и перепишем его следующим образом:

$$W(u,v) - \int_\Omega u\left(\vec{b}(x)\cdot\nabla v\right)dx = \int_\Omega f(x)v dx + \int_{\partial\Omega}\varphi(x)v\Big|_{\partial\Omega}ds, \quad (4.22)$$

где $W(u,v) = b_{\mathscr{L}}(u,v) + \int_{\partial\Omega}\left(\sigma(x) + \vec{b}(x)\cdot\vec{\nu}\right)u\Big|_{\partial\Omega}v\Big|_{\partial\Omega}ds.$

Определение 4.8. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Робена (4.12) с общим равномерно эллиптическим оператором (4.19), если для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ выполнено равенство (4.22).

Содержание

1. Вариационный метод. Обобщённые решения краевых задач
2. Корректность краевых задач: однозначная и фредгольмова разрешимость
3. Спектр и собственные функции эллиптических операторов

Корректность по Адамару

Вспомним определение корректно поставленной краевой задачи на примере внутренней задачи Дирихле для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Пусть $\mathscr{U}$ — пространство решений (в том или другом смысле) задачи (4.9), $\mathscr{F}$ — пространство правых частей (данных) задачи Дирихле. В пространствах $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ задана топология или фиксирован класс сходящихся последовательностей. Краевая задача (4.9) задаёт линейный оператор $\mathscr{U} \to \mathscr{F}$, возможно определённый не на всём $\mathscr{U}$.

Корректность по Адамару

Например, $\mathscr{U} = H^2(\Omega)$ — пространство сильных решений,
$\mathscr{F} = L_2(\Omega) \oplus H^{1/2}(\partial\Omega)$ — пространство данных задачи (4.9).
Задача Дирихле тогда есть линейный оператор

$$H^2(\Omega) \ni u \mapsto \left(\mathscr{L}u, u\big|_{\partial\Omega} \right) \in L_2(\Omega) \oplus H^{3/2}(\partial\Omega).$$

Определение. Линейная краевая задача (в частности, задача (4.9)) называется корректно поставленной (или корректной по Адамару) в классе пространств $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$, если выполнены три положения:
1) *существование*: решение существует для любых данных из $\mathscr{F}$;

Корректность по Адамару

2) *единственность*: решение единственно в пространстве $\mathscr{U}$;
3) *устойчивость*: разрешающий оператор $R : \mathscr{F} \to \mathscr{U}$, сопоставляющий правым частям из $\mathscr{F}$ единственное решение из $\mathscr{U}$, непрерывен.

Единственность решения линейной краевой задачи эквивалентна единственности тривиального решения задачи с нулевыми данными. Если $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ — нормированные (гильбертовы) пространства, то непрерывность оператора R означает его ограниченность. Соответствующее ограниченности неравенство называется *априорной оценкой* решения краевой задачи.

Корректность задачи Робена

Начнём с внутренней задачи Робена для уравнения с дивергентным оператором $\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \tag{4.12}$$

Теорема 4.2. Пусть в дивергентном равномерно эллиптическом в $\overline{\Omega}$ операторе, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, коэффициент $c \geqslant 0$ в $\overline{\Omega}$, коэффициент в краевом условии $\sigma \geqslant 0$ на $\partial\Omega$, $c \not\equiv 0$ или $\sigma \not\equiv 0$. Тогда для каждых $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$ задача (4.12) имеет единственное обобщённое решение $u^\star \in H^1(\Omega)$ и верна априорная оценка

Корректность задачи Робена: доказательство

$$\| u^\star \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \right). \quad (4.23)$$

Доказательство. 1) По теореме об эквивалентной норме симметрическая билинейная форма Робена

$$W(u,v) = \int_\Omega \left(A(x)\nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv \right) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u\,|_{\partial\Omega}\, v\,|_{\partial\Omega}\, ds$$

задаёт скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, а норма $\|u\|' = \sqrt{W(u,u)}$ эквивалентна стандартной норме $\|\cdot\|$ пространства Соболева. В частности, имеем неравенство $\|v\| \leqslant \beta\|v\|'$ для всех $v \in H^1(\Omega)$.

Корректность задачи Робена: доказательство

2) Функционал энергии задачи Робена (4.12) имеет вид

$$E_R(u) = W(u,u) - 2\left(\int_\Omega f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u\,|_{\partial\Omega}\, ds\right)$$

и удовлетворяет условиям теоремы 4.1 об экстремали.

Действительно линейный функционал

$\langle l, u\rangle = \int_\Omega f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u\,|_{\partial\Omega}\, ds$ над $H^1(\Omega)$ ограничен, т.к.

$$\left|\langle l, u\rangle\right| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}\|T\|\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}\|T\|\right)\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Корректность задачи Робена: доказательство

Обозначим $u^\star = \operatorname{argmin}_{u \in H^1(\Omega)} E_R(u)$. Необходимое условие экстремали $W\left(u^\star, v\right) - \langle l, v\rangle = 0$ для любой $v \in H^1(\Omega)$ означает, что $u^\star$ — обобщённое решение задачи Робена (4.12). Если $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ — другое обобщённое решение, то $u^\star - \tilde{u}$ удовлетворяет для любой $v \in H^1(\Omega)$ соотношению $W\left(u^\star - \tilde{u}, v\right) = 0 \Rightarrow u^\star = \tilde{u}$, единственность доказана.

3) Для вывода априорной оценки (4.23) положим $v = u^\star$ и рассмотрим цепочку неравенств:

$$\frac{1}{\beta^2}\|u^\star\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant W\left(u^\star, u^\star\right) = \left\langle l, u^\star \right\rangle \leqslant \|l\|{*}\|u^\star\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow$$

Корректность задачи Робена: доказательство

$\|u^\star\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \beta^2 \|l\|^* \leqslant \beta^2 \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|T\| \right)$. Тогда, полагая $C = \beta^2 \max\left\{1, \|T\|\right\}$, получим априорную оценку (4.23). Теорема 4.2 доказана.

Корректность задачи Дирихле

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения с дивергентным оператором $\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u$:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Теорема 4.3. Пусть в дивергентном равномерно эллиптическом в $\overline{\Omega}$ операторе, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, коэффициент $c \geqslant 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда для каждых $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ задача (4.9) имеет единственное обобщённое решение $u^\star \in H^1(\Omega)$ и верна априорная оценка

Корректность задачи Дирихле: доказательство

$$\| u^\star \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \quad (4.24)$$

Доказательство. 1) Редукция: найдём такую функцию $w \in H^1(\Omega)$, что $w\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ (это возможно, потому что $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$). Более того, существует $C_1 > 0$, не зависящая от φ, что $\|w\| \leqslant C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ (фактически речь идёт о существовании ограниченного оператора поднятия $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$). Преобразуем функционал энергии (4.10) задачи Дирихле, подставив в него $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$:

Корректность задачи Дирихле: доказательство

$$E_D(u) = E_D(u_0 + w) = b_{\mathscr{L}}(u_0 + w, u_0 + w) - 2\int_\Omega f(x)(u_0 + w)dx =$$

$$= b_{\mathscr{L}}(u_0, u_0) + 2b_{\mathscr{L}}(w, u_0) - 2\int_\Omega f(x)u_0 dx + b_{\mathscr{L}}(w, w) - 2\int_\Omega f(x)w dx\,.$$

Обозначим $\tilde{E}_D(u_0) = b_{\mathscr{L}}(u_0, u_0) - 2\langle l, u_0\rangle$, где l — линейная по u_0 часть $E_D(u_0 + w)$.

2) По теореме об эквивалентной норме симметрическая билинейная форма $b_{\mathscr{L}}$, ассоциированная с оператором $\mathscr{L}$, задаёт скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$, порождающее норму $\|u\|' = \sqrt{b_{\mathscr{L}}(u, u)}$, эквивалентную стандартной (можно взять $\sigma \equiv 1$).

Корректность задачи Дирихле: доказательство

Замечание: введём константы α и β из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \|v\|' \leqslant \alpha\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$.

3) Функционал энергии $\tilde{E}_D$ над пространством $H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет теореме об экстремали. Действительно линейный функционал $\langle l, u_0\rangle = \int_\Omega f(x)u_0 dx - b_{\mathscr{L}}(w, u_0)$ над $H_0^1(\Omega)$ ограничен, т.к. <продолжение доказательства — упражнение>

Фредгольмова разрешимость

Задача Дирихле (4.9) для уравнения с общим эллиптическим оператором (4.19), если $\vec{b} \neq 0$ или функция c принимает отрицательные значения, может не иметь решений или иметь бесконечно много решений, т.е. быть некорректной.
Приемлемое расширение понятия корректности фредгольмова разрешимость.
С неформальной точки зрения фредгольмова разрешимость есть однозначная разрешимость с точностью до конечномерных подпространств.

Фредгольмова разрешимость

Пусть $A : H \to H$ — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = F. \quad (4.25)$$

Оператор A фредгольмов, если:

- $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$;
- $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$.

Здесь $\operatorname{Ker} A = \{u \in H : Au = 0\}$ — ядро оператора A,

Erik Ivar Fredholm (1866 – 1927)

Коядро и индекс

$\operatorname{Coker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$ — коядро оператора, где
$\operatorname{Im} A = \{f \in H : \exists u \in H, Au = f\}$ — образ оператора A.
Индексом фредгольмова оператора называется число

$$\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A.$$

Замечание. Раньше в литературе было так: индекс фредгольмового оператора должен быть равен нулю, а если оператор с конечномерными ядром и коядром имеет ненулевой индекс, то он назывался *нётеровым*.
Условие на ядро означает, что однородное уравнение $Au = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений.

Теорема Фредгольма

Из условия на коядро следует, что уравнение (4.25) разрешимо, если и только если правая часть удовлетворяет конечному числу условий вида $F \perp v_j$, где $\operatorname{Coker} A = \operatorname{Lin}\left(v_1, \ldots, v_d\right)$, $j = 1,\ldots, d = \dim \operatorname{Coker} A$. Коядро оператора A совпадает с ядром сопряженного оператора: $\operatorname{Coker} A = \operatorname{Ker} A^*$. Таким образом, уравнение (4.25) разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения уравнения $A^*v = 0$ имеем $(F, v)_H = 0$.

Теорема Фредгольма. Пусть H — гильбертово пространство, $K : H \to H$ — компактный оператор, $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda I + K$ есть фредгольмов оператор с нулевым индексом.

Задача Дирихле: операторное уравнение

Проблема в том, что определения 4.7 и 4.8 не сформулированы в терминах операторных уравнений. Поэтому, во-первых, следует свести краевые задачи (4.9) и (4.12) к эквивалентным (в смысле обобщённых решений) операторным уравнениям.
Начнём с задачи Дирихле (4.9). В пространстве $H_0^1(\Omega)$ введём эквивалентную норму, порождённую скалярным произведением

$$(u,v)' = \int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x)+m\right) uv dx,$$

где $m = \max\left\{-\min_{x\in\overline{\Omega}} c(x), 0\right\}$.

Задача Дирихле: операторное уравнение

Пусть $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ — заданная граничная функция. Осуществим поднятие, т.е. найдём такую функцию $w \in H^1(\Omega)$, что $w\big|_{\partial\Omega} = \varphi$. При этом $\|w\|' \leqslant C_1 \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. Сделаем подстановку $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, в интегральное тождество

$$b_{\mathscr{L}}(u, v) - \int_\Omega u \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v\right) dx = \int_\Omega f(x) v dx \quad (4.21)$$

и перепишем его в виде

$$(u_0, v)' + \langle l_1(u_0), v\rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v\rangle, \quad (4.26)$$

где $\langle l_1(u_0), v\rangle = -m \int_\Omega u_0 v dx - \int_\Omega u_0 \vec{b}(x) \cdot \nabla v dx.$

Лемма об операторном уравнении

Лемма 4.3. Существует единственный компактный оператор $K : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, такой, что для всех $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l_1(u_0), v\rangle = (Ku_0, v)'$.

Доказательство. Проверим, что $l_1(u_0) \in H_0^1(\Omega)^*$, причём $u_0 \in L_2(\Omega)$.

Имеем $\left|\langle l_1(u_0), v\rangle\right| \leqslant m\|u_0\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|\|u_0\|_{L_2(\Omega)} \left\| \, |\nabla v| \, \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$

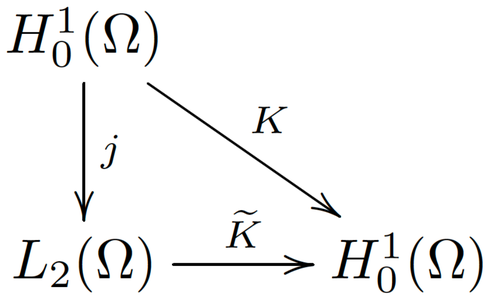
$\leqslant m\|u_0\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|\|u_0\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant$

$\leqslant \beta\left(m + \|\mathbf{b}\|\right)\|u_0\|_{L_2(\Omega)}\|v\|'.$

Замечание: константы α и β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \|v\|' \leqslant \alpha\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$.

Лемма об операторном уравнении: доказательство

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u_0 \in H_0^1(\Omega)$, что $\langle l_1(u_0), v\rangle = (\tilde{K}u_0, v)'$ и $\|\tilde{K}u_0\|' = \|l_1\| \leqslant \beta\left(m + \|\mathbf{b}\|\right)\|u_0\|_{L_2(\Omega)}$.
Данная конструкция даёт ограниченный оператор
$\tilde{K} : L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega), L_2(\Omega) \ni u_0 \mapsto \tilde{K}u_0 \in H_0^1(\Omega)$,
$\|\tilde{K}\| \leqslant \beta\left(m + \|\mathbf{b}\|\right)$. Оператор $K : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ есть композиция компактного оператора вложения $j : H_0^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ и оператора $\tilde{K}$.



Задача Дирихле: операторное уравнение

Хорошо известно, что композиция компактного оператора и ограниченного оператора (в любом порядке) есть компактный оператор. Единственность: если существует другой оператор $K' : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющей выводу леммы, то для любых $u_0, v \in H_0^1(\Omega)$ $(Ku_0 - K'u_0, v)' = 0 \Rightarrow Ku_0 = K'u_0$. Лемма доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 4.3, интегральное тождество (4.26) в виде

$$((I + K)u_0, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v \rangle. \quad (4.27)$$

Операторное уравнение для задачи Дирихле

Обозначим $\langle l, v\rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} - (w, v)' - \langle l_1(w), v\rangle$ и покажем, что функционал $l \in H_0^1(\Omega)^*$. Имеем

$$|\langle l, v\rangle| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|'_{H^1(\Omega)}\|v\|'_{H_0^1(\Omega)} +$$

$$+ \beta\left(m + \||\vec{b}|\|_{C(\overline{\Omega})}\right)\|w\|_{L_2(\Omega)}\|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \beta\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|'_{H_0^1(\Omega)} +$$

$$+ \alpha C_1\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\|v\|'_{H_0^1(\Omega)} + \beta C_1\left(m + \||\vec{b}|\|_{C(\overline{\Omega})}\right)\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\|v\|'_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\beta\|f\|_{L_2(\Omega)} + \left(\alpha + \beta\left(m + \||\vec{b}|\|_{C(\overline{\Omega})}\right)\right)C_1\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right)\|v\|'_{H_0^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H_0^1(\Omega)$, что для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l, v\rangle = (F, v)'$.

Операторное уравнение задачи Дирихле

Тогда из тождества (4.27) следует, что для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ $((I+K)u_0 - F, v)' = 0$. Отсюда получим операторное уравнение для обобщённых решений задачи Дирихле (4.9):

$$(I+K)u_0 = F. \quad (4.28)$$

По теореме Фредгольма оператор $I+K$ фредгольмов, его индекс равен нулю.

- Ядро оператора $I+K$ суть пространство обобщённых решений задачи Дирихле (4.9), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Действительно, из $(I+K)u = 0$ следует, что $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $((I+K)u, v)' = 0$.

Ядро оператора $I + K$

Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_1(u), v\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega (c(x) + m)uv\mathrm{d}x - m\int_\Omega uvdx - \int_\Omega u\vec{b}(x)\cdot\nabla v\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow b_{\mathscr{L}}(u, v) - \int_\Omega u\vec{b}(x)\cdot\nabla v dx = 0,$$ что совпадает с определением

4.4. Из фредгольмовости следует, что $\dim \mathrm{Ker}(I + K) = d < \infty$.
Пусть $u_1, \ldots, u_d \in H_0^1(\Omega)$ — базис ядра оператора $I + K$.

- Коядро оператора $I + K$ также конечномерно, его размерность равна d; выясним, из каких функций состоит $\mathrm{Coker}(I + K)$.

Коядро оператора $I + K$

Имеем $\mathrm{Coker}(I + K) = \mathrm{Ker}(I + K^*)$, где K^* — сопряжённый оператор.
Функция $u^* \in \mathrm{Ker}(I + K^*) \Leftrightarrow$ для любой $v \in H_0^1(\Omega)$ $((I + K^*)u^*, v)' = 0$.
Последнее тождество может быть переписано в виде

$$\int_\Omega A(x)\nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x) + m\right) u^* v dx - m\int_\Omega u^* v dx - \int_\Omega (\vec{b}(x) \cdot \nabla u^*) v dx = 0.$$

Интегрирование по частям даёт: $-\int_\Omega (\vec{b}(x) \cdot \nabla u^*) v dx =$

$$= \int_\Omega u^* \mathrm{div}\left(\vec{b}(x)v\right) dx = \int_\Omega u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v\right) dx + \int_\Omega u^* v \mathrm{div}\vec{b}(x) dx.$$

Отсюда интегральное тождество можно переписать так:

Коядро оператора $I + K$

$$\int_\Omega A(x)\nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x) + \operatorname{div}\vec{b}(x)\right) u_* v dx + \int_\Omega u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v\right) dx = 0.$$

Вспомним формулу для формально сопряжённого оператора:

$$\mathscr{L}^* v = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) - \vec{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u =$$

$$= -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) - \operatorname{div}\left(\vec{b}(x)u\right) + \left(c(x) + \operatorname{div}\vec{b}(x)\right) u.$$

Кроме того,

$$b_{\mathscr{L}^*}(u^*, v) = \int_\Omega A(x)\nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x) + \operatorname{div}\vec{b}(x)\right) u^* v dx.$$

Последнее интегральное тождество можно переписать в виде

Коядро оператора $I + K$

$$b_{\mathscr{L}^*}(u^*, v) + \int_\Omega u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = 0. \quad (4.29)$$

Что означает тождество (4.29)? В силу произвольности пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$, функция u^* есть обобщённое решение задачи Дирихле для формально сопряжённого оператора, имеющей вид

$$\begin{cases} \mathscr{L}^* u^* = 0 \text{ в } \Omega, \\ u^*\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Задачу (4.30) называют сопряжённой к задаче (4.9).

Критерий разрешимости задачи Дирихле

Пусть $u_1^*, \ldots, u_d^* \in H_0^1(\Omega)$ — базис $\mathrm{Coker}(I + K)$, образующий максимальную линейно независимую систему обобщённых решений задачи (4.30). Получим критерий существования обобщённого решения задачи Дирихле (4.9) для общего равномерно эллиптического оператора второго порядка. Неявный вариант критерия: $F \perp u_j^*, j = 1,\ldots, d$, где F — правая часть уравнения операторного уравнения (4.28). Чтобы получить явный вариант критерия разрешимости вспомним, как мы получили функцию $F \in H_0^1(\Omega)$: для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ $\langle l, v\rangle = (F, v)'$.

Критерий разрешимости задачи Дирихле

Отсюда $(F, u_j^*)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$(f, u_j^*)_{L_2(\Omega)} - (w, u_j^*)' - \langle l_1(w), u_j^* \rangle = 0.$$

В интегральном виде: $\int_\Omega f(x) u_j^* dx - \int_\Omega A(x) \nabla w \cdot \nabla u_j^* dx -$

$$- \int_\Omega \big(c(x) + m\big) w u_j^* dx + m \int_\Omega w u_j^* dx + \int_\Omega w \vec{b}(x) \cdot \nabla u_j^* dx = 0 \text{ или}$$

$$\int_\Omega f(x) u_j^* dx - \left(b_{\mathscr{L}}(u_j^*, w) - \int_\Omega w \vec{b}(x) \cdot \nabla u_j^* dx \right) = 0.$$ Но выражение в скобках равно нулю, потому что u_j^* — обобщённое решение задачи (4.30),

Теорема о фредгольмовой разрешимости задачи Дирихле

$\int_\Omega f(x)u_j^*dx = 0$. Подведём итоги рассуждений в следующей теореме (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$).

Теорема 4.4. Внутренняя задача Дирихле (4.9) для общего равномерно эллиптического оператора (4.19) разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи имеет конечную размерность d; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда для каждого обобщённого решения $u^* \in H_0^1(\Omega)$ задачи (4.30) $(f, u^*)_{L_2(\Omega)} = 0$; 3) пространство обобщённых решений задачи (4.30) также имеет размерность d.

Задача Робена: операторное уравнение

Работаем с задачей Робена для общего равномерно эллиптического оператора (4.19):

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \quad (4.12)$$

В пространстве $H^1(\Omega)$ рассмотрим симметрическую билинейную форму

$$(u,v)' = \int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \big(c(x)+m\big)uvdx + \int_{\partial\Omega} \big(\tau(x)+\mu\big)uvds,$$

Задача Робена: операторное уравнение

где $m = \max\left\{ -\min_{x\in\overline{\Omega}} c(x), 0 \right\}$, $\tau(x) = \sigma(x) + \vec{b}(x)\cdot\vec{\nu}(x)$,

$\mu = \max\left\{ -\min_{x\in\partial\Omega} \tau(x), 0 \right\}$. Мы предполагаем, что $c \neq 0$ или $\tau \neq 0$, поэтому форма $(\cdot\,,\cdot)'$ есть скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной. Случай $c \equiv 0, \tau \equiv 0$ исследуется отдельно. Перепишем интегральное тождество (4.22) в виде

$$(u, v)' + \langle l_3(u), v\rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (4.31)$$

Лемма об операторном уравнении

Здесь $\langle l_3(u), v\rangle = -m\int_\Omega uvdx - \mu\int_{\partial\Omega} uvds - \int_\Omega u\vec{b}(x)\cdot\nabla v dx,$

$T : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$ — оператор следа.

Лемма 4.4. Существует единственный компактный оператор $K : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$, такой, что для всех $u, v \in H^1(\Omega)$ $\langle l_3(u), v\rangle = (Ku, v)'$.

Доказательство. Рассмотрим сначала функционал вида $\langle \tilde{l}_3(u), v\rangle = -m\int_\Omega uvdx - \int_\Omega u\vec{b}(x)\cdot\nabla v dx$. Убедимся в том, что $\tilde{l}_3(u) \in H^1(\Omega)^*$:

Лемма об операторном уравнении: доказательство

$$|\langle \tilde{l}_3(u), v\rangle| \leqslant m\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \||\vec{b}|\|_{C(\overline{\Omega})}\|u\|_{L_2(\Omega)}\||\nabla v|\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant m\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \||\vec{b}|\|_{C(\overline{\Omega})}\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta\left(m + \||\vec{b}|\|_{C(\overline{\Omega})}\right)\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|'_{H^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u \in H^1(\Omega)$, что $\langle \tilde{l}_3(u), v\rangle = (\tilde{K}u, v)'$ и $\|\tilde{K}u\|' = \|l_3(u)\| \leqslant \beta\left(m + \|\mathbf{b}\|_{C(\overline{\Omega}}\right)\|u\|_{L_2(\Omega)}$.

Здесь рассуждения аналогичны тем, что были при доказательство леммы 4.3.

Лемма об операторном уравнении: доказательство

Замечание. Константы α, β происходят из теоремы об эквивалентной норме: $\beta^{-1}\|v\|_{H^1(\Omega} \leqslant \|v\|' \leqslant \alpha\|v\|_{H^1(\Omega)}$ для любой $v \in H^1(\Omega)$.

Данная конструкция определяет ограниченный оператор

$\tilde{K} : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega), L_2(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{K}u \in H^1(\Omega)$,

$\|\tilde{K}\| \leqslant \beta\left(m + \|\mathbf{b}\|_{C(\overline{\Omega}}\right)$.

Осталось разобраться с членом $-\mu \int\limits_{\partial\Omega} uvds$, входящим в определение функционала l_3.

Лемма об операторном уравнении: доказательство

Обозначим след на $\partial\Omega$ функции $u \in H^1(\Omega)$ через ψ и запишем оценку:

$$\left| -\mu \int_{\partial\Omega} uv ds \right| \leqslant \mu \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|Tv\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu \|T\| \|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant$$

$\leqslant \mu\beta \|T\| \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'$. По теореме Рисса существует такая функция $S\psi \in H^1(\Omega)$, что для любой $v \in H^1(\Omega)$ справедливо представление $-\mu \int_{\partial\Omega} uv ds = (S\psi, v)'$. Отметим, что функция $S\psi$ совершенно не должна совпадать с функцией u, но порождается ей с помощью композиции операторов $H^1(\Omega) \xrightarrow{T} L_2(\partial\Omega) \xrightarrow{S} H^1(\Omega)$.

Операторное уравнение для задачи Робена

Положим $K = \tilde{K}j + ST$, где $j : H^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — компактный оператор вложения. Для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ будем иметь

$$(Ku, v)' = (\tilde{K}u, v)' + (S\psi, v)' = \langle l_3(u), v \rangle.$$

Компактность построенного оператора K следует из компактности оператора следа. Единственность оператора K непосредственно следует из его определения. Лемма 4.4 доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 4.4, интегральное тождество (4.31) в виде

$$((I + K)u, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (4.32)$$

Оценим функционал l в правой части (4.32):

Операторное уравнение для задачи Робена

$$|\langle l, v\rangle| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|Tv\|_{L_2(\partial\Omega)}\|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \beta\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\|\|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)\|v\|'_{H^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H^1(\Omega)$, что для всех $v \in H^1(\Omega)$ $\langle l, v\rangle = (F, v)'$. Следовательно, для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u - F, v)' = 0$, и операторное уравнение для обобщённых решений задачи Робена (4.12) имеет вид

$$(I + K)u = F. \quad (4.33)$$

Ядро оператора $I + K$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов.

- Ядро оператора $I + K$ состоит из обобщённых решений задачи Робена (4.12), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$. Действительно, $(I + K)u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H^1(\Omega)\ ((I + K)u, v)' = 0$. Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_3(u), v\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x) + m\right) uv dx + \int_{\partial\Omega} \left(\tau(x) + \mu\right) uv ds -$$

$$-m\int_\Omega uv dx - \mu\int_{\partial\Omega} uv ds - \int_\Omega u\vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0 \Leftrightarrow$$

Коядро оператора $I + K$

$b_{\mathscr{L}}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \tau(x) uv ds - \int_{\Omega} u\vec{b}(x) \cdot \nabla v dx = 0$, что совпадает с определением 4.8. Фредгольмовость означает, что $\dim \operatorname{Ker}(I + K) = d < \infty$. Пусть $u_1, \ldots, u_d \in H^1(\Omega)$ — базис ядра оператора $I + K$.

- Коядро оператора $I + K$ также конечномерно, его размерность равна d, потому что $\operatorname{ind}(I + K) = 0$. Имеем $\operatorname{Coker}(I + K) = \operatorname{Ker}(I + K^*)$, где K^* — сопряжённый оператор. Функция $u^* \in \operatorname{Ker}(I + K^*) \Leftrightarrow$ для любой $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u^*, v)' = 0$.

Коядро оператора $I + K$

Последнее тождество может быть переписано в виде

$$(u^*, v)' + (u^*, Kv)' = 0 \Leftrightarrow (u^*, v)' + \langle l_3(v), u^* \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_\Omega A(x) \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x) + m\right) u^* v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\tau(x) + \mu\right) u^* v ds -$$

$$-m \int_\Omega u^* v dx - \mu \int_{\partial\Omega} u^* v ds - \int_\Omega v\vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx = 0.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$-\int_\Omega v\vec{b}(x) \cdot \nabla u^* dx = -\int_{\partial\Omega} u^* v\vec{b} \cdot \vec{\nu} ds + \int_\Omega u^* \mathrm{div}\left(\vec{b}(x)v\right) dx.$$

Раскроем дивергенцию произведения:

Коядро оператора $I + K$

$$-\int_\Omega v\vec{b}(x)\cdot\nabla u^* dx = -\int_{\partial\Omega} u^* v\vec{b}\cdot\vec{\nu} ds + \int_\Omega u^*\left(\vec{b}(x)\cdot\nabla v\right)dx +$$

$$+\int_\Omega u^* v \mathrm{div}\vec{b}(x)dx.$$ Отсюда

$$\int_\Omega A(x)\nabla u^*\cdot\nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x)+\mathrm{div}\,\vec{b}(x)\right)dx + \int_{\partial\Omega}\left(\tau(x)-\vec{b}\cdot\vec{\nu}\right)u^* v ds +$$

$$+\int_\Omega u^*\left(\vec{b}(x)\cdot\nabla v\right)dx = 0.$$ Учтём вид формально сопряжённого оператора, ассоциированную с ним форму

$$b_{\mathscr{L}}(u^*, v) = \int_\Omega A(x)\nabla u^*\cdot\nabla v dx + \int_\Omega \left(c(x)+\mathrm{div}\,\vec{b}(x)\right)u^* v dx$$

Сопряжённая задача

и то, что $\tau(x) - \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x) = \sigma(x)$. Перепишем интегральное равенство в виде

$$b_{\mathscr{L}^*}(u^*, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u^* v ds + \int_{\Omega} u^* \left(\vec{b}(x) \cdot \nabla v \right) dx = 0.$$

Но в таком случае функция $u^* \in H^1(\Omega)$ есть обобщённое решение задачи Робена вида

$$\begin{cases} \mathscr{L}^* u^* = 0 \text{ в } \Omega, \\ A(x) \nabla u^* \cdot \vec{\nu} + \tau(x) u^* \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Задачу (4.34) называют *сопряжённой* к задаче (4.12).

Критерий разрешимости задачи Робена

Отметим, что в отличие от задачи (4.30) в задаче (4.34) не только формально сопрягается оператор $\mathscr{L}$, но и изменяется граничный оператор.

Пусть $u_1^*, \ldots, u_d^* \in H^1(\Omega)$ — базис в $\mathrm{Coker}(I + K)$, образующий максимальную линейно независимую систему обобщённых решений задачи (4.34). Получим критерий существования обобщённого решения задачи Робена (4.12).

Неявный критерий суть $F \perp u_j^*, j = 1,\ldots, d$, где F — правая часть операторного уравнения (4.33).

Критерий разрешимости задачи Робена

$$(F, v_j^*)' = 0 \Leftrightarrow \langle l, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow \left(f, u_j^*\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\varphi, Tu_j^*\right)_{L_2(\partial\Omega)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_\Omega f(x)u_j^* dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u_j^* \Big|_{\partial\Omega} ds = 0, j = 1,\ldots d.$$

Подведём итоги исследования фредгольмовой разрешимости задачи Робена в следующей теореме (предполагается, что $f \in L_2(\Omega), \varphi \in L_2(\partial\Omega)$).

Теорема о фредгольмовой разрешимости задачи Робена

Теорема 4.5. Если $c \neq 0$ или $\tau \neq 0$, то внутренняя задача Робена (4.12) для общего равномерно эллиптического оператора (4.19) разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи имеет конечную размерность d; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда для каждого обобщённого решения $u^* \in H^1(\Omega)$ сопряжённой задачи (4.34) выполнено условие разрешимости

$$\int_\Omega f(x)u^* dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u^*\Big|_{\partial\Omega} ds = 0; \quad (4.35)$$

3) пространство обобщённых решений задачи (4.34) также имеет размерность d.

Задача Неймана для анизотропного уравнения Пуассона

Нам остался случай, когда $c(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$ и $\tau(x) = \sigma(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x) = 0$ для всех $x \in \partial\Omega$. Оставив полный разбор этого случая слушателям, рассмотрим задачу Неймана для анизотропного уравнения Пуассона вида

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \tag{4.36}$$

В частности, если $A(x) \equiv E$, то (4.36) есть задача Неймана для обычного уравнения Пуассона. Имеем $c = 0$ и $\tau = 0$, поэтому теорема 4.5 не работает.

Лемма о компактном операторе K

В пространстве $H^1(\Omega)$ рассмотрим скалярное произведение $(u,v)' = \int_\Omega \left(A(x)\nabla u \cdot \nabla v + uv\right) dx$, порождающее норму, эквивалентную стандартной. Перепишем интегральное равенство (9) из определения 4.6 следующим образом:

$$(u,v)' + \langle l_2(u), v\rangle = (f,v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}, \quad (4.37)$$

где $T : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$ — оператор следа, $\langle l_2(u), v\rangle = -\int_\Omega uv dx$.

Лемма 4.5. Существует единственный компактный оператор $K : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ с тем свойством, что для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ $(Ku, v)' = \langle l_2(u), v\rangle$.

Доказательство леммы о компактном операторе K

Доказательство леммы 4.5 вполне аналогично доказательству леммы 4.4. Оценка для функционала l_2 имеет вид

$$|\langle l_2(u), v\rangle| \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \beta\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|'_{H^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует такая функция $\tilde{K}u \in H^1(\Omega)$, что $\langle l_2(u), v\rangle = (\tilde{K}u, v)'$ и $\|\tilde{K}u\|' = \|l_2(u)\| \leqslant \beta\|u\|_{L_2(\Omega)}$. Данная конструкция даёт ограниченный оператор $\tilde{K} : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{K}u \in H^1(\Omega)$: $\|\tilde{K}\| \leqslant \beta$. Положим $K = \tilde{K}j$, где $j : H^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — компактный оператор вложения, и для любых $u, v \in H^1(\Omega)$ будем иметь

Операторное уравнение для задачи Неймана

$$(Ku, v)' = (\tilde{K}u, v)' = \langle l_2(u), v\rangle.$$

Оператор K компактен как композиция компактного и ограниченного, а его единственность следует из определяющего свойства. Лемма 4.5 доказана.

Перепишем, пользуясь леммой 4.5, интегральное равенство (4.37) в виде

$$((I + K)u, v)' = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}. \quad (4.38)$$

Оценим функционал $H^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle l, v\rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}$:

$$|\langle l, v\rangle| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|Tv\|_{L_2(\partial\Omega)}\|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\|\|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)\|v\|'_{H^1(\Omega)}.$$

Операторное уравнение для задачи Неймана

По теореме Рисса существует единственная функция $F \in H^1(\Omega)$, что для всех $v \in H^1(\Omega)$ $\langle l, v\rangle = (F, v)'$.
Следовательно, для любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$ $((I + K)u - F, v)' = 0$ и операторное уравнение для обобщённых решений задачи Неймана (4.36) имеет вид

$$(I + K)u = F. \quad (4.39)$$

По теореме Фредгольма оператор $I + K$ фредгольмов. Ядро оператора $I + K$ состоит из обобщённых решений задачи Неймана (4.6), когда $f = 0$ и $\varphi = 0$.

Ядро оператора $I + K$

Действительно, $(I + K)u = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H^1(\Omega)\ ((I + K)u, v)' = 0.$

Преобразуем последнее равенство: $(u, v)' + \langle l_2(u), v\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx - \int_\Omega uv dx = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx = 0.$$

Покажем, что $\mathrm{Ker}(I + K) = \mathrm{Lin}\{1\}$, т.е. ядро оператора $I + K$ состоит из констант. Действительно, если пробная функция

$$v = u \in \mathrm{Ker}(I + K), \text{ то } 0 = \int_\Omega A(x)|\nabla u|^2 dx \geqslant \int_\Omega \gamma|\nabla u|^2 dx.$$

Поэтому $\nabla u = 0$ п.в. в $\Omega \Rightarrow u = \mathrm{const}$ в Ω, что и требовалось.

Критерий разрешимости задачи Неймана

Очевидно, что K из леммы 4.5 — самосопряжённый оператор, поэтому $\mathrm{Coker}(I+K) = \mathrm{Ker}(I+K^*) = \mathrm{Ker}(I+K) = \mathrm{Lin}\{1\}$. Неявный критерий существования решения задачи (4.36): $F \perp 1$, где F — правая часть операторного уравнения (4.39). Имеем $(F,1)' = 0 \Leftrightarrow \langle l,1\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_\Omega f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)ds = 0. \quad (4.40)$$

Теорема 4.6. Внутренняя задача Неймана (4.36) для анизотропного уравнения Пуассона разрешима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи состоит из констант; 2) обобщённое решение существует тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (4.40) (предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$).

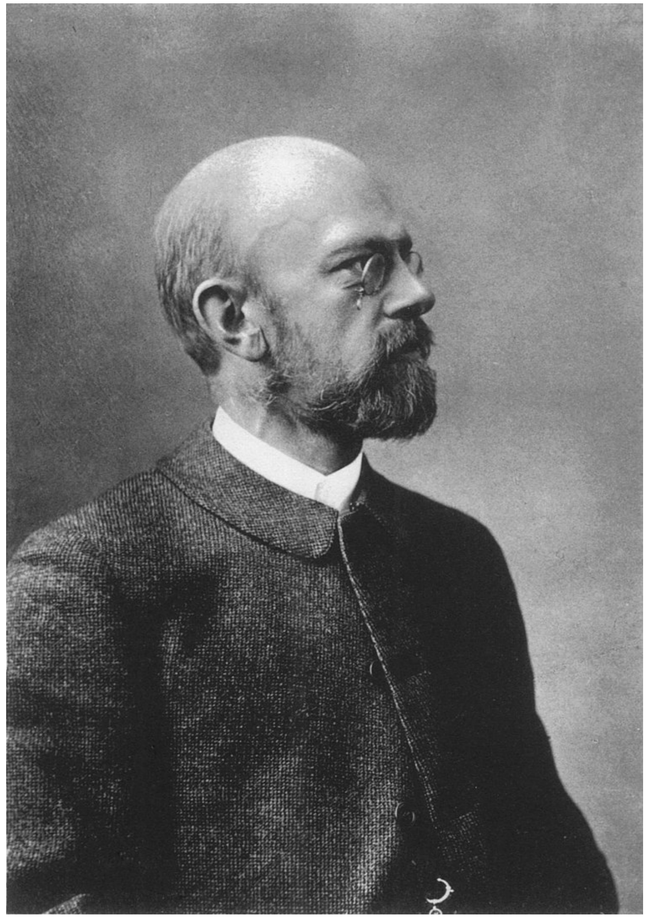
Содержание

1. Вариационный метод. Обобщённые решения краевых задач
2. Корректность краевых задач: однозначная и фредгольмова разрешимость
3. Спектр и собственные функции эллиптических операторов

Теорема Гильберта—Шмидта

Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), $K : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор в H, $(\ker K)^{\perp}$ — ортогональное дополнение ядра K. Предположим, что $\dim(\ker K)^{\perp} = \infty$. Тогда

1) $\sigma(K) = \sigma_d(K) \Subset \mathbb{R}$, $\sharp\sigma(K) = \aleph_0$ (спектр оператора K дискретен, то есть состоит из собственных значений K, и представляет собой счётное ограниченное подмножество действительной прямой);



David Hilbert
(1862 — 1943)

Теорема Гильберта—Шмидта

2) единственная предельная точка $\sigma(K)$ есть нуль;
3) $\forall \lambda \in \sigma(K)\backslash\{0\}$ $\dim \ker(K - \lambda I) < \infty$, т.е. любое ($\neq 0$) собственное значение K имеет конечную кратность (это немедленно следует из теоремы Фредгольма);
4) пусть $\sigma(K)\backslash\{0\} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $d_k = \dim \ker(K - \lambda_k I)$, $h_1^{(k)}, \ldots, h_{d_k}^{(k)}$ — ортогональный базис $\ker(K - \lambda_k I)$, тогда $\left\{ h_j^{(k)} : k \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, d_k \right\}$ — ортогональный базис $(\ker K)^{\perp}$.

Erhard Schmidt
(1876 — 1959)

Обобщённые с.з. и с.ф.: условия Дирихле

Рассмотрим в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, дивергентный равномерно эллиптический оператор вида

$$\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u, \quad (4.41)$$

где $A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$ — равномерно положительно определённая матрица, $a_{ij} \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $c \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Поставим спектральную задачу с оператором (4.41) и условием Дирихле на границе:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \lambda u, x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Обобщённые с.з. и с.ф.: условия Дирихле

По аналогии с определением 4.5 определим обобщённые собственные значения и собственные функции спектральной задачи (4.42).

Определение 4.9. Функция $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ называется *обобщённой собственной функцией* (о.с.ф.), если существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ (обобщённой собственное значение, о.с.ф.) и для любой $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$b_{\mathscr{L}}(u, v) := \int_\Omega \left(A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x) uv \right) dx = \lambda \int_\Omega uv dx. \quad (4.43)$$

Замечание. Сильная с.ф., очевидно, является также и о. с. ф. При некоторых дополнительных условиях верно и обратное.

Обобщённые с.з. и с.ф.: условия Робена (условия Неймана)

Рассмотрим спектральную задачу с оператором (4.41) и условием Робена на границе:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \lambda u, x \in \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Определение 4.10. Функция $0 \neq u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённой собственной функцией* (о.с.ф.), если существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ (обобщённое собственное значение, о.с.ф.) и для любой $v \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$W(u,v) := b_{\mathscr{L}}(u,v) + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)u\big|_{\partial\Omega} v\big|_{\partial\Omega} ds = \lambda \int_{\Omega} uvdx. \quad (4.45)$$

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора

Теорема 4.7. О.с.з. и о.с.ф. спектральной задачи Дириле (4.42) или спектральной задачи Неймана (задача (4.44) с $\sigma(x) \equiv 0$) существуют и имеют свойства:

(i) все о.с.з. образуют счётное множество, принадлежащее действительной прямой, ограниченное снизу, не имеющее конечных предельных точек $\Rightarrow$ упорядоченная по возрастанию последовательность о.с.з. $\lambda_k \to +\infty$, $k \to \infty$;

(ii) каждое о.с.з. имеет конечную кратность;

(iii) о.с.ф. u_k и u_j, отвечающие разным собственным значениям λ_k и λ_j, ортогональны в пространстве $L_2(\Omega)$, а также в $H_0^1(\Omega)$ (для задачи Дирихле) или $H^1(\Omega)$ (для задачи Неймана) относительно эквивалентных скалярных произведений, которые будут указаны отдельно;

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора

(iv)система, которая получается объединением ортогональных базисов всех собственных подпространств, есть ортогональный базис пространства $L_2(\Omega)$, а также $H_0^1(\Omega)$ (для задачи Дирихле) или $H^1(\Omega)$ (для задачи Неймана) относительно эквивалентных скалярных произведений.

Доказательство. Будем исследовать спектральную задачу (4.42) с условием Дирихле на границе (разбор спектральной задачи Неймана делается аналогично). **Шаг 1.** Пусть $m = \max\left\{ -\min_{x\in\overline{\Omega}} c(x), 0 \right\}$. Рассмотрим *модифицированный оператор*

$$\tilde{\mathscr{L}}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + \left(c(x) + m\right)u \quad (4.46)$$

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

и билинейную симметрическую форму

$$b_{\tilde{L}}(u,v) \equiv (u,v)' = \int_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \Big(c(x)+m\Big)uvdx, \quad (4.47)$$

которая по теореме об эквивалентной норме есть скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева. Тогда интегральное тождество в определении 4.9 можно переписать в виде

$$(u,v)' = (\lambda + m)(u,v)_{L_2}. \quad (4.48)$$

Другими словами, если λ — о.с.з. спектральной задачи (4.42) для оператора (4.41), то $\lambda + m$ — о.с.з. спектральной задачи Дирихле для модифицированного оператора с той же о.с.ф.

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

Шаг 2. Рассмотрим в пространстве $H_0^1(\Omega)$ линейный функционал

$$H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto (u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx.$$

Этот функционал ограниченный, что немедленно следует из неравенства Коши—Буняковского и теоремы об эквивалентной норме. По теореме Рисса $\exists! U \in H_0^1(\Omega)$ с тем свойством, что $(u, v)_{L_2(\Omega)} = (U, v)'$ для всех $v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow$ тождество (4.48) можно переписать так: $(u, v)' = (\lambda + m)(U, v)' \Leftrightarrow (u - (\lambda + m)U, v)' = 0$ для всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Отсюда следует, что $u = (\lambda + m)U$.

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

Шаг 3. Исследуем операторное уравнение $u = (\lambda + m)U$ в $H_0^1(\Omega)$. Имеем оператор $H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto Ku = U \in H_0^1(\Omega)$. По теореме о компактности оператор K компактен, потому что он представляет собой композицию компактного оператора вложения $j : H_0^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ и ограниченного оператора $\tilde{K} : L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Операторное уравнение принимает вид $(\lambda + m)Ku = u \Leftrightarrow$ $Ku = \dfrac{1}{\lambda + m}u = \nu u$. Кроме того, K — самосопряжённый оператор: для любых $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ имеем

$$(Ku_1, u_2)' = (u_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = (u_2, u_1)_{L_2(\Omega)} = (Ku_2, u_1)' = (u_1, Ku_2)'.$$

Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора: доказательство

Итак, с.ф. компактного оператора K идентичны о.с.ф. модифицированного оператора (4.46), следовательно, оператора (4.41), а собственные значения оператора K обратны о.с.з. $\tilde{\mathscr{L}}$. Все свойства о.с.з. и о.с.ф. спектральной задачи (4.42) следуют из теоремы Гильберта—Шмидта и простого наблюдения, что K — положительно определённый оператор. О.с.ф. u_k и u_j, отвечающие разным собственным значениям λ_k и λ_j, ортогональны в пространстве $H_0^1(\Omega)$ относительно скалярного произведения (4.47). Базис в пространстве $H_0^1(\Omega)$ есть базис в $L_2(\Omega)$, поскольку $H_0^1(\Omega)$ (и даже $C_0^\infty(\Omega)$) всюду плотно в $L_2(\Omega)$. Теорема 4.7 доказана.

Разложение функций в ряд по с.ф.

Упражнение. Получить аналогичное доказательство для спектральной задачи (4.44) с условием Неймана на границе.

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис о.с.ф. в пространстве $L_2(\Omega)$. Подставим $u = v = u_k$ в равенство (4.48):

$$\|u_k\|'^2 = (\lambda_k + m)\|u_k\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_k + m = \frac{1}{\nu_k} > 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ v_k = \frac{u_k}{\omega_k} = \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$ — ортонормированный базис $H_0^1(\Omega)$. Если функция $w \in H_0^1(\Omega)$, то её можно разложить в ряд Фурье вида

Разложение функций в ряд по с.ф.

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} (w, v_k)' v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(w, \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right)' \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}};$$

имеет место равенство Парсеваля—Стеклова: $\|w\|'^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(w, \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right)' \right|^2.$$ С другой стороны, $w \in L_2(\Omega)$, поэтому

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} (w, u_k)_{L_2(\Omega)} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} w_k u_k \Rightarrow \|w\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^2.$$ Поэтому

Разложение функций в ряд по с.ф.

$$\|w\|'^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k + m} \left| \left(w, u_k\right)' \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + m) |w_k|^2 = m\|w\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |w_k|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |w_k|^2 \leqslant \|w\|'^2 - m\|w\|^2_{L_2(\Omega)}.$$ Таким образом, коэффициенты Фурье (относительно $L_2(\Omega)$) функций из $H_0^1(\Omega)$ имеют то свойство, что сходится не только ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^2$, но и ряд с весовыми коэффициентами вида $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |w_k|^2$.

Что осталось за кадром?

- Вариационный метод решения спектральной задачи
- Гладкость обобщённых решений краевых задач (когда обобщённые решения оказываются сильными / классическими?)
- Гладкость собственных функций дивергентных эллиптических операторов
- Теорема Г. Вейля об асимптотике собственных значений