Операции над обобщёнными функциями

Задача 3.1. Пусть $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\operatorname{supp} f = \{0\}$. Доказать, что f однозначно представляется в виде $f = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha D^\alpha \delta$.

Задача 3.2. Найти общее решение уравнения $(x+1)^2 y'' = 0$ в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Задача 3.3. Доказать, что $\delta\left(x_1\right) \otimes \ldots \otimes \delta\left(x_n\right) = \delta\left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

Задача 3.4. Найти свёртку $\left(\theta(x) \otimes \delta(t)\right) * \left(\dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$ в $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ и указать её носитель (θ — функция Хевисайда).

Задача 3.5. Вычислить свёртку $-\dfrac{1}{|x|} * \partial_{\vec{\nu}} \delta_{S_R}$ в $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^3\right)$, где $\partial_{\vec{\nu}} \delta_{S_R}$ — двойной слой на сфере $S_R = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\right\}$, действующий на основные функции по формуле

$$\left(\partial_{\vec{\nu}} \delta_{S_R}, \varphi\right) = -\int\limits_{S_R} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}} ds.$$

Задача 3.6. Найти преобразование Фурье обобщённой функции $\mathscr{P}\dfrac{1}{x}$ — главной части $\dfrac{1}{x}$, действующей на основные функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ по формуле

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Чтобы получить зачёт за третье общее дом. задание, необходимо правильно решить любые **три задачи** из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **30.05.26, 23:59**.

Ресурсы для решения общего дом. задания #3

1. Материалы к практическим занятиям по теме «Операции над обобщёнными функциями».
2. Презентация лекционной темы #3 «Обобщённые функции и фундаментальное решение».
3. В.С. Владимиров. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
4. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

5. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.
6. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.