Вариационные проблемы уравнений в частных производных

Задача 2.1. Доказать, что для всех функций $v \in H^1(0,1)$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left((v')^2 + 2xv\right) dx + v(0)^2 + v(1)^2 \geqslant -\frac{41}{270}.$$

Имеет ли место знак равенства для какой-либо функции из указанного пространства?

Задача 2.2. Рассмотрим кольцо $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\right\}$. Дать вариационную формулировку краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \text{ в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u\big|_{\rho=2} = 0, \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ — полярный радиус, θ — полярный угол.

Задача 2.3. Доказать, что для всех функций $u \in C_0^1(D)$, где $D \Subset \mathbb{R}^2$ — стандартный диск, выполнено неравенство

$$\iint_D 2x_1x_2u\,dx_1dx_2 \leqslant \frac{\pi}{1152} + \iint_D \left|\nabla u\right|^2 dx_1dx_2.$$

Задача 2.4. Пусть $Q = (0,\pi)^{\times 3}$ — куб. Среди функций $u \in H^1(Q)$, принимающих граничные значения

$$u\big|_{x_1=0} = u\big|_{x_2=0} = u\big|_{x_3=0} = u\big|_{x_1=\pi} = u\big|_{x_2=\pi} = 0,$$

найти ту, которая доставляет минимум функционалу

$$E(u) = \iiint_Q \left|\nabla u\right|^2 dx_1dx_2dx_3 + \int_0^\pi dx_1 \int_0^\pi u\big|_{x_3=\pi} \sin x_1 \sin x_2 dx_2.$$

Задача 2.5. Пусть $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 1 < |x| < 2\right\}$ — шаровой слой. Среди функций $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию $u\big|_{|x|=2} = 0$, найти ту, которая доставляет минимум функционалу

$$E(u) = \int_Q \left(\left|\nabla u\right|^2 + 2u\right) dx + \int_{|x|=1} u^2 ds.$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Чтобы получить зачёт за второе общее дом. задание, необходимо правильно решить любые **три задачи** из предложенных пяти. Дедлайн для всех групп — **16.05.26, 23:59**.

Ресурсы для решения общего дом. задания #2

1. Материалы к практическим занятиям по теме «Вариационные проблемы уравнений в частных производных».
2. Пар. 6.1, 6.2 главы 6 «Эллиптические операторы второго порядка» книги А.Е. Байкова.
3. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.
4. В.П. Михайлов. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976.
5. Piero Bassanini, Alan R. Elcrat. Theory and Applications of Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, 1997.