НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ: МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассматривается начально-краевая задача на интервале действительной прямой или периодическая задача Коши для линейного эволюционного уравнения второго порядка (параболического или гиперболического типа) с постоянными коэффициентами. Требуется получить представление решения задачи в виде ряда Фурье, а также интегральное представление. Для этого:

1) при необходимости сделать редукцию к однородным краевым условиям и/или заменой неизвестной функции уничтожить первую производную по x в операторе уравнения;
2) разделением переменных получить задачу Штурма-Лиувилля (первый шаг метода Фурье);
3) решить задачу Штурма-Лиувилля (найти собственные значения и собственные функции);
4) получить и решить ‘кошички’ — задачки Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (второй шаг метода Фурье);
5) получить общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи (периодической задачи Коши);
6) для указанных правых частей найти коэффициенты Фурье в явном виде (взять интегралы, их выражающие);
7) исследовать зависимость решения от параметра задачи;
8) визуализировать решение (построить в математических средах поверхность или анимацию) для разных характерных и бифуркационных значений параметра задачи, выдержав необходимую глубину ряда Фурье.

Ресурсы для решения задания #5

1. Примеры решения инд. задания #5.
2. Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х. Сборник задач по уравнениями математической физики. М: Физматлит, 2001.
3. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд.,стереотипное. М.: МЦНМО, 2004.
4. Комеч А.И. Практические решение уравнений математической физики. Механико-математический факультет МГУ, 1993. http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf.

Номер варианта студента/студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 20**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2025/26 уч.г.**

Список вариантов

Вариант 1.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = \cos t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0.$

Вариант 2

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = \sin \omega t, \\ u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \psi(x) = 0.$

Вариант 3.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = e^{-\alpha t}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0.$

Вариант 4.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u_x, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = \sin \omega t,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0.$

Вариант 5.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + cu + f(x,t),\ -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(x + 2\pi, t) \equiv u(x,t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$f(x,t) = e^{-t}\operatorname{sign}\left(\sin x\right), \varphi(x) = 0.$

Вариант 6.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + bu_x - u + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = 1, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = \dfrac{x}{\pi}.$

Вариант 7.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bu_t, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = \sin t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0.$

Вариант 8.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_t + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = \sin \omega t,\ u_x\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0.$

Вариант 9.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x + \alpha u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = \cos x, \psi(x) = 0.$

Вариант 10.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = \sin t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0.$

Вариант 11.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - bu_x, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = \sin x.$

Вариант 12.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = e^{-\alpha t}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0.$

Вариант 13.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = \sin x.$

Вариант 14.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bu_t,\ -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(x + 2\pi, t) \equiv u(x,t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = \operatorname{sign}\left(\sin x\right).$

Вариант 15.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = \sin \omega t,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = \sin x.$

Вариант 16.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bu_t, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = \sin t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0.$

Вариант 17.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = \sin \omega t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0.$

Вариант 18.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = e^{-\alpha t}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0.$

Вариант 19.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + cu + f(x,t), 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u_x\big|_{x=0} = \cos t,\ u_x\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0.$

Вариант 20.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x, 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = \sin \omega t,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0.$