ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных»

Тема 5 «Начально-краевые задачи: метод разделения переменных»

Рассматривается начально-краевая задача на интервале действительной прямой либо периодическая задача Коши для линейного эволюционного уравнения второго порядка (параболического или гиперболического типа) с постоянными коэффициентами. Требуется получить представление решения задачи в виде ряда Фурье, а также интегральное представление:

1) при необходимости сделать редукцию к однородным краевым условиям и/или заменой неизвестной функции уничтожить первую производную по x в операторе уравнения;
2) первый шаг метода Фурье: разделением переменных получить задачу Штурма—Лиувилля;
3) решить задачу Штурма-Лиувилля: найти собственные значения и собственные функции;
4) второй шаг метода Фурье: получить и решить ‘кошички’ — задачки Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля;
5) получить общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи (периодической задачи Коши);
6) для указанных правых частей найти коэффициенты Фурье в явном виде (взять интегралы, их выражающие);
7) исследовать зависимость решения от параметра задачи;
8) визуализировать решение (построить в математических средах эволюционный диафильм или анимацию) для разных типичные и бифуркационных значений параметра задачи, выдержав необходимую глубину ряда Фурье.

Пример #5.0. Рассмотрим ограниченный стержень длины l без внутренних источников тепла. Предположим, что его левый конец поддерживается при постоянной температуре u_0, правый конец теплоизолирован, начальная температура $u(x,0) = \varphi(x)$. Эволюцию распределения температуры можно найти, решив задачу

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ u\big|_{x=0} = A,\ u_x\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\varphi \in L_2(0,l)$. Пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $A = 10$, $a = 1$, $l = \pi$. Здравый смысл подсказывает, что в каждый момент времени $t > 0$ температура должна монотонно убывать от левого конца до правого, примерно как на рис. 1.1.

Однако, найти монотонное по x решение начально-краевой задачи в явном виде не представляется возможным…

- **Сделаем редукцию к однородным краевым условиям.**

Метод Фурье или метод разделения переменных работает, если краевые условия однородные. Положим $u = v + w$, где v — новая неизвестная функция, а функция w удовлетворяет краевым условиям

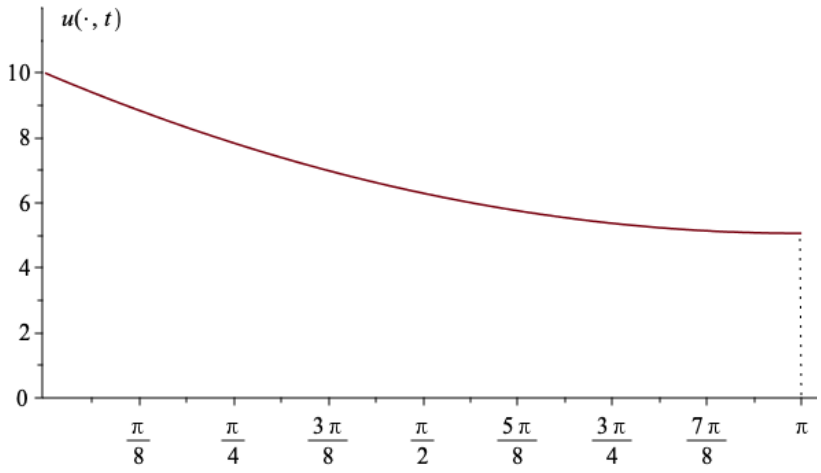


Рис. 1.1. Это не решение!

$$w\big|_{x=0} = A,\ w_x\big|_{x=l} = 0.$$

Простейшая функция, удовлетворяющая вышеуказанным соотношениям, есть константа $w(x) \equiv A$. Получим начально-краевую задачу для функции v подстановкой $u = v + A$ в основную задачу:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x) - A, \\ v\big|_{x=0} = 0,\ v_x\big|_{x=l} = 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Метод Фурье (метод разделения переменных) включает в себя два этапа:

1) разделением переменных, получение и решение задачи Штурма-Лиувилля;
2) разложение решения по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля и нахождение коэффициентов разложения.

- **Первый шаг метода Фурье: разделением переменных получим задачу Штурма-Лиувилля.**

Найдём некоторые частные решения однородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющие краевым условиям задачи (1.1), представляющие собой *стоячие затухающие температурные волны*. Для этого сделаем подстановку $V = X(x)Y(t)$ в задачу

$$\begin{cases} V_t - a^2 V_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ V\big|_{x=0} = 0,\ V_x\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Подстановка в краевые условия даёт:

$$X(0)Y(t) = 0,\ X'(l)Y(t) = 0.$$

Мы полагаем, что функции $X = X(x)$ и $Y = Y(t)$ не равны нулю тождественно, поэтому последние два равенства дают

$$X(0) = 0,\ X'(l) = 0.$$

Подстановка $V = X(x)Y(t)$ в однородное уравнение теплопроводности приводит к соотношению

$$X(x)Y'(t) - a^2X''(x)Y(t) = 0.$$

Преобразуем это уравнение, разделив переменные:

$$\frac{Y'(t)}{a^2Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку x и t — независимые переменные, имеем

$$\frac{Y'(t)}{a^2Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = -\lambda\,.$$

Собираем задачу Штурма-Лиувилля (λ — спектральный параметр):

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < l, \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Постановка задачи Штурма-Лиувилля: найти все такие λ, что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (1.2). По терминологии:

- λ — собственные значения задачи (1.2);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (1.2), соответствующие собственному значению λ.

- **Решим задачу Штурма-Лиувилля (1.2), для чего рассмотрим три случая.**

a) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$. Имеем $X' = -\omega C_1 e^{-\omega x} + \omega C_2 e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -\omega C_1 e^{-\omega l} + \omega C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородным алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\omega e^{-\omega l} & \omega e^{\omega l} \end{vmatrix} = \omega(e^{\omega l} + e^{-\omega l}) = 0.$$

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

b) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $X'' = 0$ есть $X = C_1 x + C_2$. Имеем $X' = C_1$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

c) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Имеем $X' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -\omega C_1 \sin \omega l + \omega C_2 \cos \omega l = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Система (1.3) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\cos \omega l = 0$. Отсюда $\omega_n = \dfrac{\pi}{l}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тогда собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (1.2) есть $\lambda_n = \frac{\pi^2}{l^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, а соответствующие собственные функции имеют вид $X_n(x) = b_n \sin \omega_n x = b_n \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}$, $b_n \neq 0$.

Для каждого целого неотрицательного числа n получим стоячую решение $V_n(x,t) = X_n(x)Y_n(t)$. Здесь и далее везде считаем, что $b_n = 1$.

Общее решение уравнения $Y_n' + a^2\lambda_n Y_n = 0$ есть $Y_n = B_n e^{-a^2\lambda_n t}$. Отсюда указанные решения имеют вид $V_n(x,t) = B_n e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2 t} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}$. Первый этап метода Фурье завершён.

- **Второй шаг метода Фурье: получим и решим «кошички» — задачки Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.**

Идея Ж.-Б. Ж. Фурье: решение начально-краевой задачи (1.1) можно представить в виде суперпозиции (суммы) бесконечного числа решений, полученных на предыдущем этапе:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(t)\,. \quad (1.4)$$

Разрешим формальное дифференцирование ряда:

$$v_t = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n'(t),\ v_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n''(x)Y_n(t),\ v_x = \sum_{n=0}^{\infty} X_n'(x)Y_n(t).$$

Подстановка ряда (1.4) в начально-краевую задачу (1.1) даёт

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n'(t) + a^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n''(x)Y_n(t) = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(0) = \varphi(x) - A, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(0)Y_n(t) = 0, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n'(l)Y_n(t) = 0. \end{cases}$$

Краевые условия выполнены автоматически, потому что $X_n = X_n(x)$ — собственные функции задачи (1.2).

Разложим функцию в начальном условии в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (1.2):

$$\varphi(x) - A = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sin \omega_n x.$$

Найдём коэффициенты разложения:

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l (\varphi(x) - A)\sin \omega_n x dx \text{ или}$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x)\sin \omega_n x dx - \frac{2A}{\pi(n + 1/2)}. \quad (1.5)$$

Преобразуем уравнение теплопроводности и начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)\left(Y_n'(t) + a^2\lambda_n Y_n(t)\right) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x).$$

Получим задачки Коши для неизвестных коэффициентов разложения $Y_n = Y_n(t)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$:

$$\begin{cases} Y_n' + a^2\lambda_n Y_n = 0, t > 0, \\ Y_n(0) = \varphi_n . \end{cases} \quad (1.6)$$

Единственное решение задачки (1.6) имеет вид $Y_n(t) = \varphi_n e^{-a^2\lambda_n t}$. Итак, ряд (1.4) для решения задачи (1.1) имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2 t} \sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l}, \quad (1.7)$$

где выражение для коэффициентов φ_n даётся формулой (1.5).

Получив ряд (1.7) для решения начально-краевой задачи, его следует исследовать на сходимость. Однако, в настоящей теме курсовой работы сходимость не изучается.

- **Получим общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.**

Для этого подставим в формулу (1.7) выражение (1.5) для коэффициентов φ_n, заменив переменную интегрирования x на s:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi(n+1/2)s}{l} ds - \frac{2A}{\pi(n+1/2)} \right) e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2 t} \sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Разобьём ряд в разность двух рядов:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi(n+1/2)s}{l} ds\, e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2 t} \sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A}{\pi(n+1/2)}e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2t}\sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Суммирование в элементарных функциях вычитаемого ряда представляется сомнительным, поэтому оставим его без изменений. Устроим рокировку:

$$v(x,t)=\int_0^l\varphi(s)ds\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2t}\sin\frac{\pi(n+1/2)s}{l}\sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A}{\pi(n+1/2)}e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2t}\sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Обозначим ядро в первом интеграле получившийся формулы через

$$K(s,x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2t}\sin\frac{\pi(n+1/2)s}{l}\sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

Тогда общая формула решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности имеет вид

$$u(x,t)=A+\int_0^l K(s,x,t)\varphi(s)ds-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A}{\pi(n+1/2)}e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}(n+1/2)^2t}\sin\frac{\pi(n+1/2)x}{l}.$$

- **Для указанных правых частей найдём коэффициенты Фурье в явном виде и визуализируем решение.**

Положим $\varphi(x)\equiv 0$, $A=10$, $a=1$, $l=\pi$. Тогда решение основной начально-краевой задачи представляется формулой

$$u(x,t) = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-20}{\pi(n+1/2)} e^{-(n+1/2)^2 t} \sin(n+1/2)x$$

или $u(x,t) = 10 - \frac{40}{\pi} e^{-\frac{1}{4}t} \sin\frac{x}{2} - \frac{40}{3\pi} e^{-\frac{9}{4}t} \sin\frac{3x}{2} - \ldots$

Рассмотрим N-ое приближение решения начально-краевой задачи $u_N(x,t) = 10 + Y_0(t)X_0(x) + \ldots + Y_N(t)X_N(x)$. Построим приближённое решение в три момента времени:

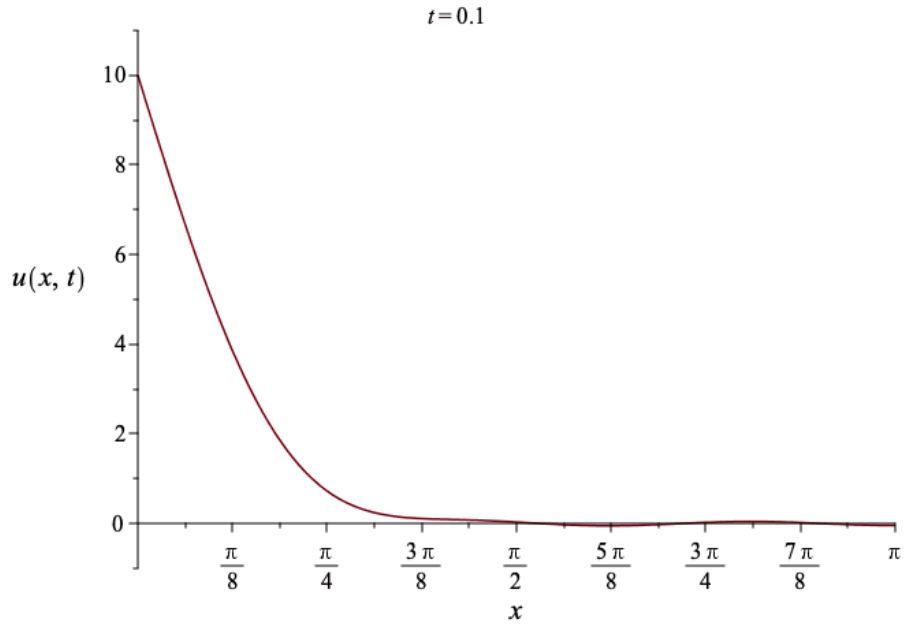
i) $t_1 \ll T = \frac{l^2}{a^2} = \pi^2$, например, $t_1 = 1$;

ii) $t_2 \approx T$, например, $t_2 = 10$;

iii) $t_3 \gg T$, например, $t_3 = 100$.

Пусть $N = 5$. График приближённого решения при $t_1 = 1$ изображён на рис. 1.1. График приближённого решения при $t_2 = 10$ изображён на рис. 1.3. Приближённое решение при $t_3 = 100$ практически не отличается от константы (рис 1.4.).

Посмотрим на приближённое решение в динамике:



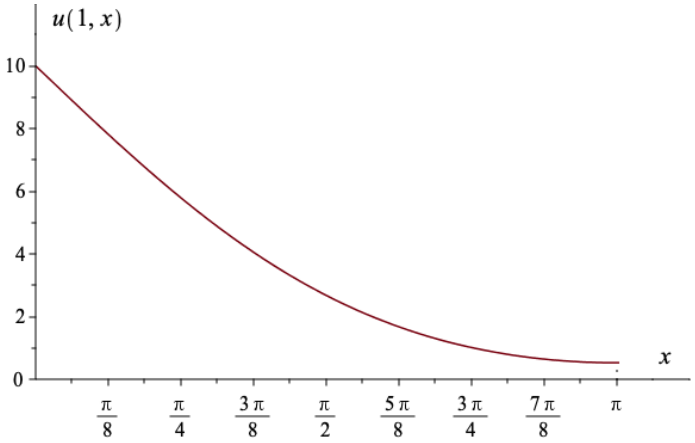


Рис. 1.2. Приближённое решение при $t_1=1$

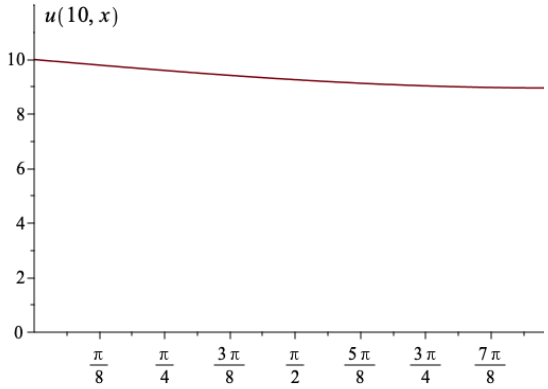


Рис. 1.3. Приближённое решение при $t_2=10$

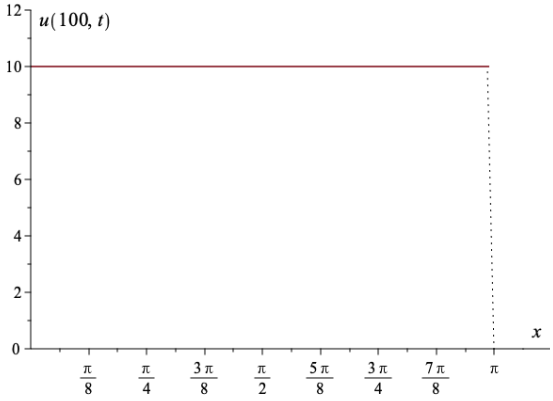


Рис. 1.4. Приближённое решение при $t_3=100$

Пример #5.1. Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения вида

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = A\sin\Omega t\,. \end{cases}$$

Здесь $\varphi \in H_0^1(0,\pi)$, то есть $\varphi \in H^1(0,\pi)$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, $\psi \in L_2(0,\pi)$. Дадим возможную физическую интерпретацию поставленной задачи. Левое сечение упругого стержня длины π, на который не действуют внешние силы, жёстко закреплено, а правое сечение движется по закону $A \sin \Omega t$. Тогда поставленная задача описывает продольные колебания стержня, где $u = u(x, t)$ — отклонение от положения равновесия сечения с координатой $x \in (0,\pi)$ в момент времени $t > 0$.

1) Сделаем редукцию к однородным краевым условиям. Метод Фурье или метод разделения переменных работает, когда краевые условия однородные. Положим $u = v + w$, где v — новая неизвестная функция, а функция w удовлетворяет краевым условиям $w\big|_{x=0} = 0,\ w\big|_{x=\pi} = A \sin \Omega t$. Простейшая функция, удовлетворяющая вышеуказанным соотношениям, есть $w(x, t) = \dfrac{Ax}{\pi} \sin \Omega t$.

Получим начально-краевую задачу для функции v подстановкой $u = v + \dfrac{Ax}{\pi} \sin \Omega t$ в основную задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = \dfrac{A\Omega^2 x}{\pi} \sin \Omega t, 0 < x < \pi, t > 0, \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x),\ v_t\big|_{t=0} = \psi(x) - \dfrac{A\Omega x}{\pi}, \\ v\big|_{x=0} = 0,\ v\big|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Обозначим $f(x, t) = \dfrac{A\Omega^2 x}{\pi} \sin \Omega t$, $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \dfrac{A\Omega x}{\pi}$.

Метод Фурье (метод разделения переменных) включает в себя два этапа или шага:

1) разделением переменных, получение и решение задачи Штурма—Лиувилля, нахождение стоячих волн;
2) разложение решения по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля и нахождение коэффициентов разложения.

2) Первый шаг метода Фурье: разделением переменных получим задачу Штурма-Лиувилля. Найдём *стоячие волны*, удовлетворяющие краевым условиям задачи (2.1). Для этого сделаем подстановку $V = X(x)Y(t)$ в задачу

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0, 0 < x < \pi, t > 0, \\ V\big|_{x=0} = 0,\ V\big|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

Подстановка в краевые условия даёт

$$X(0)Y(t) = 0,\ X(\pi)Y(t) = 0.$$

Мы полагаем, что функции $X = X(x)$ и $Y = Y(t)$ не равны нулю тождественно, поэтому последние два равенства дают

$$X(0) = 0,\ X(\pi) = 0.$$

Подстановка $V = X(x)Y(t)$ в однородное волновое уравнение даёт уравнение

$$X(x)Y''(t) - a^2 X''(x)Y(t) = 0.$$

Преобразуем это уравнение, разделив переменные:

$$\frac{Y''(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку x и t — независимые переменные, имеем

$$\frac{Y''(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = -\lambda\,.$$

Собираем задачу Штурма-Лиувилля, где λ — спектральный параметр:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, X(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Постановка задачи Штурма-Лиувилля: найти все такие λ, что существуют нетривиальные (отличные от тождественного нуля) $X = X(x)$ — решения задачи (2.2). По терминологии:

- λ — собственные значения задачи (2.2);
- $X = X(x)$ — собственные функции задачи (2.2), соответствующие собственному значению λ.

3) Решим задачу Штурма—Лиувилля (2.2), для чего рассмотрим три случая.

a) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' - \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\omega\pi} + C_2 e^{\omega\pi} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородным алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega\pi} & e^{\omega\pi} \end{vmatrix} = e^{\omega\pi} - e^{-\omega\pi} = 0$. Отсюда $e^{2\omega\pi} = 1$.

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

b) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $X'' = 0$ есть $X = C_1 x + C_2$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1\pi + C_2 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

c) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $X'' + \omega^2 X = 0$ есть $X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos \omega l + C_2 \sin \omega \pi = 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Система (2. 3) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\sin \omega \pi = 0$. Отсюда $\omega_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (2.2) есть $\lambda_n = n^2$, а соответствующие собственные функции имеют вид $X_n(x) = b_n \sin \omega_n x = b_n \sin nx$, $b_n \neq 0$.

Для каждого натурального числа n получим стоячую волну $V_n(x,t) = X_n(x) Y_n(t)$. Здесь и далее везде считаем, что $b_n = 1$. Общее решение уравнения $Y_n'' + a^2 \lambda_n Y_n = 0$ есть $Y_n = A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t) = C_n \cos(a\omega_n t + \alpha_n)$. Отсюда стоячие волны имеют вид

$V_n = \left(A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t)\right) \sin nx =$

$= C_n \cos(ant + \alpha_n) \sin nx$. Первый этап метода Фурье завершён.

4) Второй шаг метода Фурье: получим и решим «кошички» — задачки Коши для коэффициентов разложения решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

Идея Ж.-Б. Ж. Фурье: решение начально-краевой задачи (2.1) можно представить в виде

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(t). \qquad (2.4)$$

Разрешим формальное дифференцирование ряда:

$v_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n'(t)$, $v_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n''(t)$, $v_x = \sum_{n=1}^{\infty} X_n'(x)Y_n(t)$,

$v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n''(x)Y_n(t)$. Подстановка ряда (2.4) в начально-краевую задачу (2.1) даёт

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n''(t) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n''(x)Y_n(t) = f(x,t), 0 < x < \pi, t > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(0) = \varphi(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n'(0) = \tilde{\psi}(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(0)Y_n(t) = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\pi)Y_n(t) = 0. \end{cases}$$

Краевые условия выполнены автоматически, потому что $X_n = X_n(x)$ — собственные функции задачи (2.2).

Разложим функции в начальных условиях в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.2):

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \omega_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin nx,$$

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin \omega_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin nx.$$

Выражения для коэффициентов разложения имеют вид

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(s)\sin(ns)ds, \ \tilde{\psi}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{\psi}(s)\sin(ns)ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(s)\sin(ns)ds + \frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n}. \quad (2.5)$$

Разложим правую часть уравнения в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля (2.2):

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\omega_n x=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin nx.$$

Выражение для коэффициентов (функций времени) разложения имеет вид

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,t)\sin(nx)dx=\frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\Omega t.$$

Преобразуем волновое уравнения и начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left(Y_n''(t)+a^2\lambda_n Y_n(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)f_n(t),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x),\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\psi}_n X_n(x).$$

Получим «кошички» — задачки Коши для неизвестных коэффициентов разложения $Y_n=Y_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} Y_n''+a^2\lambda_n Y_n=\dfrac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\Omega t,\ t>0,\\ Y_n(0)=\varphi_n,\ Y_n'(0)=\tilde{\psi}_n\,. \end{cases} \qquad (2.6)$$

(i) Нерезонансный случай: $\Omega\neq a\omega_n$ для всех натуральных n. Общее решение уравнения для $Y_n=Y_n(t)$ при всех $n\in\mathbb{N}$ имеет вид

$$Y_n(t)=A_n\cos a\omega_n t+B_n\sin a\omega_n t+\frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n\left(a^2\omega_n^2-\Omega^2\right)}\sin\Omega t.$$

Учитывая начальные условия, находим решение задачи (2.6):

$$Y_n(t) = \varphi_n \cos a\omega_n t + \left(\frac{\tilde{\psi}_n}{a\omega_n} - \frac{2A\Omega^3(-1)^{n+1}}{\pi n a\omega_n \left(a^2\omega_n^2 - \Omega^2\right)} \right) \sin a\omega_n t +$$

$$+ \frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n \left(a^2\omega_n^2 - \Omega^2\right)} \sin \Omega t. \quad (2.7)$$

(ii) Резонансный случай: $\Omega = a\omega_m$ для некоторого натурального m. Для $n \neq m$ решение задачи (2.6) даётся формулой, непосредственно следующей из формулы (2.7):

$$Y_n(t) = \varphi_n \cos a\omega_n t + \left(\frac{\tilde{\psi}_n}{a\omega_n} - \frac{2A\omega_m^3(-1)^{n+1}}{\pi n \omega_n \left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)} \right) \sin a\omega_n t +$$

$$+ \frac{2A\omega_m^2(-1)^{n+1}}{\pi n \left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)} \sin a\omega_m t.$$

При $n = m$ общее решение уравнения имеет вид

$$Y_m(t) = A_m \cos a\omega_m t + B_m \sin a\omega_m t + \frac{Aa\omega_m(-1)^m}{\pi m} t \cos a\omega_m t.$$

С учётом начальных условий решение задачи (2.6) имеет вид

$$Y_m(t) = \varphi_m \cos a\omega_m t + \left(\frac{\tilde{\psi}_m}{a\omega_m} - \frac{Aa\omega_m(-1)^m}{\pi m} \right) \sin a\omega_m t +$$

$$+ \frac{Aa\omega_m(-1)^m}{\pi m} t \cos a\omega_m t.$$ В нерезонансном случае ряд (2.4), представляющий решение начально-краевой задачи (2.1), имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(ant)\sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n}{an} \sin(ant)\sin(nx) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n \left(a^2n^2 - \Omega^2\right)} \sin \Omega t - \frac{2A\Omega^3(-1)^{n+1}}{\pi n^3 a \left(a^2n^2 - \Omega^2\right)} \sin(ant) \right) \sin(nx).$$

В резонансном случае, когда $\Omega = a\omega_m$, ряд (2.4), представляющий решение начально-краевой задачи, имеет вид $v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(ant)\sin(nx) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n}{an} \sin(ant)\sin(nx) +$

$$+ \sum_{n=1, n\neq m}^{\infty} \left(\frac{2Am^2(-1)^{n+1}}{\pi n\left(n^2-m^2\right)} \sin(amt) - \frac{2Am^3(-1)^{n+1}}{\pi n^2\left(n^2-m^2\right)} \sin(ant) \right) \sin(nx) +$$

$$+ \frac{Aa(-1)^m}{\pi} \left(t\cos(amt) - \sin(amt) \right) \sin(mx).$$

Введём следующее обозначение:

$$p_\Omega(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2A\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n\left(a^2n^2-\Omega^2\right)} \sin\Omega t - \frac{2A\Omega^3(-1)^{n+1}}{\pi n^3 a\left(a^2n^2-\Omega^2\right)} \sin(ant) \right) \sin(nx), \\ \text{если } \frac{\Omega}{a} \notin \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{n=1, n\neq m}^{\infty} \left(\frac{2Am^2(-1)^{n+1}}{\pi n\left(n^2-m^2\right)} \sin(amt) - \frac{2Am^3(-1)^{n+1}}{\pi n^3\left(n^2-m^2\right)} \sin(ant) \right) \sin(nx) + \\ + \frac{Aa(-1)^m}{\pi} \left(t\cos(amt) - \sin(amt) \right) \sin(mx), \text{если } \frac{\Omega}{a} = m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Как в нерезонансном случае, так и в резонансном случае ряд (2.4), представляющий решение начально-краевой задачи, имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(ant)\sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_n}{an} \sin(ant)\sin(nx) + p_\Omega(x,t). \tag{2.9}$$

5) Получим общую формулу интегрального представления решения начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Для этого подставим в формулу (2.9) выражения (2.5) для коэффициентов φ_n, $\tilde{\psi}_n$, заменив переменную интегрирования x на s:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ant)\sin(nx)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(s)\sin(ns)ds+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(ant)}{an}\sin(nx)\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(s)\sin(ns)ds+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n}\frac{\sin(ant)}{an}\sin(nx)+p_{\Omega}(x,t)\,. \tag{2.10}$$

Суммирование в элементарных функциях явного ряда из (2.10), а также рядов из (2.8) представляется очень трудным, поэтому оставим эти ряды без изменений. Сделаем рокировку:

$$v(x,t)=\int_0^{\pi}\varphi(s)ds\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ant)\sin(nx)\sin(ns)+\int_0^{\pi}\psi(s)ds\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(ant)}{an}\sin(nx)\sin(ns)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n}\frac{\sin(ant)}{an}\sin(nx)+p_{\Omega}(x,t)\,.$$

Обозначим $K(s,x,t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(ant)}{an}\sin(nx)\sin(ns)$. Тогда $\dfrac{\partial K}{\partial t}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(ant)\sin(nx)\sin(ns)$, и формула для решения начально-краевой задачи для волнового уравнения имеет вид

$$u(x,t)=\frac{Ax}{\pi}\sin\Omega t+\int_0^{\pi}\frac{\partial K}{\partial t}\varphi(s)ds+\int_0^{\pi}K(s,x,t)\psi(s)ds+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\Omega(-1)^n}{\pi n}\frac{\sin(ant)}{an}\sin(nx)+p_{\Omega}(x,t). \tag{2.11}$$

6—7) Найдём решение для $\varphi = 0$ и $\psi = 0$, исследуем его зависимость от параметра $\Omega > 0$. Кроме того, положим $a = 1, A = 10^{-2}$.

(i) Нерезонансный случай: $\Omega \notin \mathbb{N}$. Тогда решение представляется в виде ряда

$$u(x,t) = 10^{-2}\frac{x}{\pi}\sin\Omega t + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2}\frac{2\Omega(-1)^n}{\pi n^2}\sin(nt)\sin(nx) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2}\frac{2\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n\left(n^2-\Omega^2\right)}\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{n^2}\sin(nt)\right)\sin(nx).$$

Фиксируем точку $x \in (0,\pi)$. Возможны два случая.

a) $\Omega \in \mathbb{Q}_+\backslash\mathbb{N}$, то есть $\Omega = \dfrac{\mu}{\nu}$, где μ, ν — взаимно простые натуральные числа, причём $\nu \geqslant 2$. Тогда решение периодично по t с минимальным периодом $T = 2\pi\nu$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ $\sin n(t+T) = \sin(nt + 2\pi\nu n) = \sin(nt)$, поэтому

$$u(x,t+T) = 10^{-2}\frac{x}{\pi}\sin\left(\Omega t + 2\pi\nu\Omega\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2}\frac{2\Omega(-1)^n}{\pi n^2}\sin(nt)\sin(nx) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2}\frac{2\Omega^2(-1)^{n+1}}{\pi n\left(n^2-\Omega^2\right)}\left(\sin\left(\Omega t + 2\pi\nu\Omega\right) - \frac{\Omega}{n^2}\sin(nt)\right)\sin(nx) =$$
$$= u(x,t).$$

b) $\Omega \notin \mathbb{Q}$. Тогда решение периодическим по t не будет, но будет условно периодическим.

В обоих случаях решение — ограниченная функция для всех $x \in [0,\pi]$ и $t \geqslant 0$, что устанавливается элементарной оценкой составляющих решение рядов.

(ii) Резонансный случай: $\Omega = m \in \mathbb{N}$. Тогда решение представляется в виде ряда

$$u(x,t) = 10^{-2}\frac{x}{\pi}\sin mt + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2}\frac{2m(-1)^n}{\pi n^2}\sin(nt)\sin(nx) +$$

$$+ \sum_{n=1,n\neq m}^{\infty} 10^{-2}\frac{2m^2(-1)^{n+1}}{\pi n\left(n^2-m^2\right)}\left(\sin(mt) - \frac{m}{n^2}\sin(nt)\right)\sin(nx) +$$

$$+\frac{(-1)^m}{\pi}10^{-2}\left(t\cos(mt) - \sin(mt)\right)\sin(mx).$$

Очевидно, что решение в нерезонасном случае не периодическая функция и не может быть ограниченной на промежутке $t \in [0,\infty)$ из-за секулярного члена $\frac{(-1)^m}{\pi}10^{-2}t\cos(mt)\sin(mx)$. Отметим, что оценка этого члена не зависит от числа m и линейно растёт со временем:

$$\left|\frac{(-1)^m}{\pi}10^{-2}t\cos(mt)\sin(mx)\right| \leqslant \frac{t}{100\pi}.$$

Приложение к примеру #5.1

(см. оригинальный MAPLE-документ на странице курса в LMS; free-trial версия математической MAPLE доступна по ссылке и работает 15 дней).