ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛДО И МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Для всех вариантов, кроме 4, 7, 10, 13, 16, 19, 24, 25, 27, 30, 33, 37, 39: рассматривается начальная задача на действительной прямой для линейного эволюционного оператора второго порядка (параболического или гиперболического типа) с постоянными коэффициентами, либо начально-краевая задача на полупрямой с условием Дирихле или условием Неймана на конце. Требуется получить интегральную формулу для решения задачи. Для этого:

1) методом преобразования Фурье построить фундаментальное решение оператора задачи;
2) при необходимости сделать редукцию к однородным краевым условиям, если речь идёт о начально-краевой задаче;
3) для начально-краевых задач: осуществить нечётное/чётное продолжение данных редуцированной задачи в область $x < 0$ в зависимости от рода краевого условия;
4) преобразованием Фурье по пространственной переменной x получить задачу Коши для фурье-образа решения;
5) обратным преобразованием Фурье получить формулу интегрального представления решения, принимая в расчёт построенное в первом пункте фундаментальное решение;
6) для начально-краевых задач: от интегрирования по прямой $-\infty < x < \infty$ в полученной формуле перейти к интегрированию по лучу $0 \leqslant x < \infty$;
7) применяя интегральную формулу, найти единственное решение начальной/начально-краевой задачи с указанными правыми частями;
8) визуализировать в математических средах полученное в предыдущем пункте решение.

Для вариантов 4, 7, 10, 13, 16, 19, 24, 25, 27, 30, 33, 37, 39: построить фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, используя преобразование Фурье по всем или по части переменных и/или метод спуска. Считать известными фундаментальные решения оператора Лапласа, оператора теплопроводности и волнового оператора.

Ресурсы для решения задания #4

1. Материалы практической темы «Операции над обобщёнными функциями».
2. Примеры решения инд. задания #4.
3. Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х. Сборник задач по уравнениями математической физики. М: Физматлит, 2001.
4. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд.,стереотипное. М.: МЦНМО, 2004.
5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979.

Номер варианта студента/студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 40**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2025/26 уч.г.**

Список вариантов

Вариант 1.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = -2e^{-t}\cos x, \varphi(x) = \sin x.$

Вариант 2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = -2e^{-2t}\cos x, \varphi(x) = \cos x.$

Вариант 3.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = \sin t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = x(\cos t - \sin t), \varphi(x) = 0.$

Вариант 4.

Построить фундаментальное решение телеграфного оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2m\frac{\partial}{\partial t},$$

где $m = \text{const}$. Проанализировать его зависимость от параметра m.

Вариант 5.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 5u_x, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = 2e^{-x}.$

Вариант 6.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 5u, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), u\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$\varphi(x) = e^{-2x}, \psi(x) = 0.$

Вариант 7.

Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^n$ для $n > 4$.

Вариант 8.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_t + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$f(x,t) = x^2(\sin t - \cos t) - 2\cos, \varphi(x) = x^2.$

Вариант 9.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \sin t, \\ u\big|_{t=0} = 0, u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = 2\sin t \sin x, \psi(x) = \cos x.$

Вариант 10.

Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^2$.

Вариант 11.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = e^{-t}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = -2e^{-t}(1+x), \varphi(x) = 1 + x.$

Вариант 12.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u_x + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \cos t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$f(x,t) = \left(-x^2 + 6x - 3\right)\cos t, \varphi(x) = 1 + x^2.$

Вариант 13.

Построить фундаментальное решение эллиптического оператора $\Delta - k^2$ $(k > 0)$ в $\mathbb{R}^2$.

Вариант 14.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = -x^2 \sin t - 2\cos t, \varphi(x) = x^2.$

Вариант 15.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t,\ -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$\varphi(x) = \sin x, \psi(x) = -\sin x.$

Вариант 16.

Построить фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ $(k > 0)$ в $\mathbb{R}^3$.

Вариант 17.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = \cos x.$

Вариант 18.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x - u + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 1, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = e^{-t}(\sin x - \cos x) + 1, \varphi(x) = \sin x + 1.$

Вариант 19.

Построить фундаментальное решение оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial}{\partial x} - c.$

Выяснить его зависимость от параметров b и c.

Вариант 20.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_t + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \nu(t), \\ u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$f(x,t) = \left(t^2 - 2t + 2\right)\cos x, \nu(t) = t^2.$

Вариант 21.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = \nu(t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$\nu(t) = e^{-t}, \varphi(x) = \sin x.$

Вариант 22.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$f(x,t) = \cos t \sin x, \varphi(x) = \sin x.$

Вариант 23.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u_t, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = \nu(t), \\ u\big|_{t=0} = x + 1,\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$\nu(t) = e^{-t}, \psi(x) = -x - 1.$

Вариант 24.

Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^4$.

Вариант 25.

Построить фундаментальное решение оператора Клейна-Гордона-Фока

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m^2$$

($m > 0$). Выяснить зависимость фундаментального решения от параметра m.

Вариант 26.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = e^{-t}\cos x, \varphi(x) = \cos x.$

Вариант 27.

Построить фундаментальное решение оператора $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\frac{\partial}{\partial y} + \mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Вариант 28.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \nu(t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$\nu(t) = e^{-t}, \varphi(x) = e^{-x}.$

Вариант 29.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \cos t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

$f(x,t) = x - e^{-x}\sin t, \varphi(x) = e^{-x} + x.$

Вариант 30.

Построить фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ ($k > 0$) в $\mathbb{R}^2$.

Вариант 31.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = e^{-t}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = 1 + e^{-t}\sin x, \varphi(x) = \sin x + 1.$

Вариант 32.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = \cos t, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$f(x,t) = -2\cos t\cos x, \varphi(x) = \sin x - 1.$

Вариант 33.

Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^3$.

Вариант 34.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u_x + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \sin t, \\ u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$f(x,t) = e^{-x}\sin t, \psi(x) = e^{-x}.$

Вариант 35.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, 0 < x < +\infty, 0 < t < T, \\ u_x\big|_{x=0} = \nu(t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$\nu(t) = e^{-2t}, \varphi(x) = \sin x.$

Вариант 36.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = \nu(t), \\ u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$f(x,t) = \left(t^2 - 2t + 2\right)\sin x, \nu(t) = t^2 - 2t\,.$

Вариант 37.

Построить фундаментальное решение оператора Шрёдингера

$$i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

($m > 0$) с гамильтонианом свободной частицы в трёхмерном евклидовом пространстве.

Вариант 38.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x - u, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \nu(t), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

$\nu(t) = e^{-t}, \varphi(x) = e^{-x}.$

Вариант 39.

Построить фундаментальное решение эллиптического оператора $\Delta - k^2$ ($k > 0$) в $\mathbb{R}^3$.

Вариант 40.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u_x - u, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0, \psi(x) = 2e^{-x}$**.**