ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных»

Тема 4 «Фундаментальные решения ЛДО и метод преобразования Фурье»

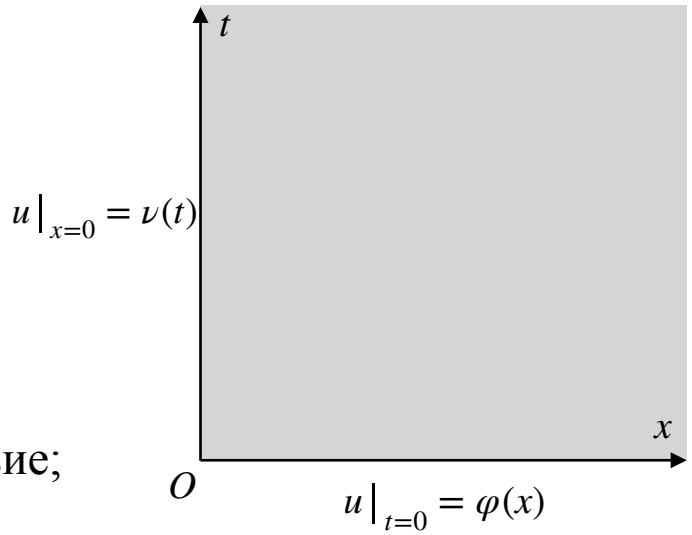
Рассматривается начальная задача на действительной прямой для линейного эволюционного оператора второго порядка (параболического или гиперболического типа) с постоянными коэффициентами, либо начально-краевая задача на полупрямой с условием Дирихле или условием Неймана. Требуется получить интегральную формулу для решения задачи. Для этого:

1) методом преобразования Фурье построить фундаментальное решение оператора задачи;
2) при необходимости сделать редукцию к однородным краевым условиям, если речь идёт о начально-краевой задаче, и/или уничтожить первую производную по x в операторе уравнения;
3) для начально-краевых задач: осуществить нечётное/чётное продолжение данных редуцированной задачи в область $x < 0$ в зависимости от рода краевого условия (нечётное продолжение — для условия Дирихле; чётное продолжение — для условия Неймана);
4) преобразованием Фурье по пространственной переменной x получить задачу Коши для фурье-образа решения;
5) обратным преобразованием Фурье получить формулу интегрального представления решения, принимая в расчёт построенное в первом пункте фундаментальное решение;
6) для начально-краевых задач: от интегрирования по прямой $-\infty < x < \infty$ в полученной формуле перейти к интегрированию по лучу $0 \leqslant x < \infty$;
7) применяя интегральную формулу, найти единственное решение начальной/начально-краевой задачи с указанными правыми частями;

8) визуализировать (построить в математических средах эволюционный диафильм либо анимацию) полученное в предыдущем пункте решение.

Пример #4.1. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения параболического типа

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u_x - 2u, \\ 0 < x < +\infty, 0 < t < T, \\ u\big|_{x=0} = \nu(t); \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$



$\nu(t) = e^{-\alpha t}$, $\varphi(x) = \cos x$.

- $u\big|_{x=0} = \nu(t)$ — краевое условие;
- $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ — начальное условие.

($\alpha > 0$ — параметр)

1) Методом преобразования Фурье построим фундаментальное решение оператора задачи.

Имеем оператор $\mathscr{L}u = u_t - u_{xx} + u_x + 2u$. Уравнение для фундаментального решение имеет вид

$$E_t - E_{xx} + E_x + 2E = \delta(x,t). \quad (1)$$

Будем искать фундаментальное решение $E \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} E \subset \{(x,t) : -\infty < x < \infty, t \geqslant 0\}$. Пусть $\hat{E}(\xi,t) = \mathscr{F}_x[E(x,t)]$ — фурье-образ фундаментального решения (преобразование Фурье относительно пространственной переменной x). Подвергнем преобразованию Фурье по пространственной переменной x уравнение (1):

$$\hat{E}_t - (-i\xi)^2\hat{E} - i\xi\hat{E} + 2\hat{E} = \mathscr{F}_x[\delta(x,t)](\xi) = 1(\xi) \otimes \delta(t) \Rightarrow$$
$$\mathscr{M}\hat{E} \equiv \hat{E}_t + \left(\xi^2 - i\xi + 2\right)\hat{E} = \delta(t).$$

Известно, что $\hat{E} = \mathscr{E}(\xi, t)\theta(t)$, где $\mathscr{E}$ — классическое решение задачи Коши вида

$$\begin{cases} \mathscr{E}_t + \left(\xi^2 - i\xi + 2\right)\mathscr{E} = 0, \\ \mathscr{E}\Big|_{t=0} = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение задачи (2) имеет вид $\mathscr{E} = e^{-\left(\xi^2 - i\xi + 2\right)t}$. Итак, мы нашли фурье-образ фундаментального решения: $\hat{E} = \theta(t)e^{-\left(\xi^2 - i\xi + 2\right)t}$. Найдём обратное преобразование Фурье:

$$E(x,t) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}_\xi\left[\hat{E}(-\xi,t)\right] = \frac{\theta(t)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\xi^2 + i\xi + 2\right)t}e^{i\xi x}d\xi =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t - i\xi t - 2t + i\xi x}d\xi = \frac{\theta(t)e^{-2t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(\xi^2 + i\xi\left(1 - \frac{x}{t}\right)\right)}d\xi =$$

$$= \frac{\theta(t)e^{-2t}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(\xi^2 + 2i\xi\frac{t-x}{2t} - \frac{(t-x)^2}{4t^2}\right)}e^{-\frac{(t-x)^2}{4t}}d\xi = \frac{\theta(t)e^{-2t-\frac{(t-x)^2}{4t}}}{2\pi}\cdot$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{t}\xi + i\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\right)^2}d\xi = \left\{\eta = \sqrt{t}\xi + i\frac{t-x}{2\sqrt{t}}, d\xi = \frac{d\eta}{\sqrt{t}}\right\} =$$

$$= \frac{\theta(t)e^{-2t-\frac{(t-x)^2}{4t}}}{2\pi\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-2t-\frac{(t-x)^2}{4t}}.$$

Итак, $E(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-2t-\frac{(t-x)^2}{4t}}$ — фундаментальное решение оператора $\mathscr{L}u = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial x} + 2$ из пространства $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ с носителем в виде полуплоскости $\{(x,t) : -\infty < x < \infty, t \geqslant 0\}$.

Замечание. Можно показать, что $E(x,t) \to \delta(x)$ при $t \to +0$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2) Уничтожим первую производную по x в операторе уравнения и сделаем редукцию к однородным краевым условиям.

Решение задачи (1) представим в виде $u = v + w$, где v — новая неизвестная функция, а w — функция, удовлетворяющая краевому условию $w\big|_{x=0} = \nu(t)$. Можно сразу взять функцию $w(x,t) = \nu(t)$, а можно выбрать другую функцию более гибким образом. Отложим этот выбор до следующих пунктов.

Получим начально-краевую задачу для функции v :

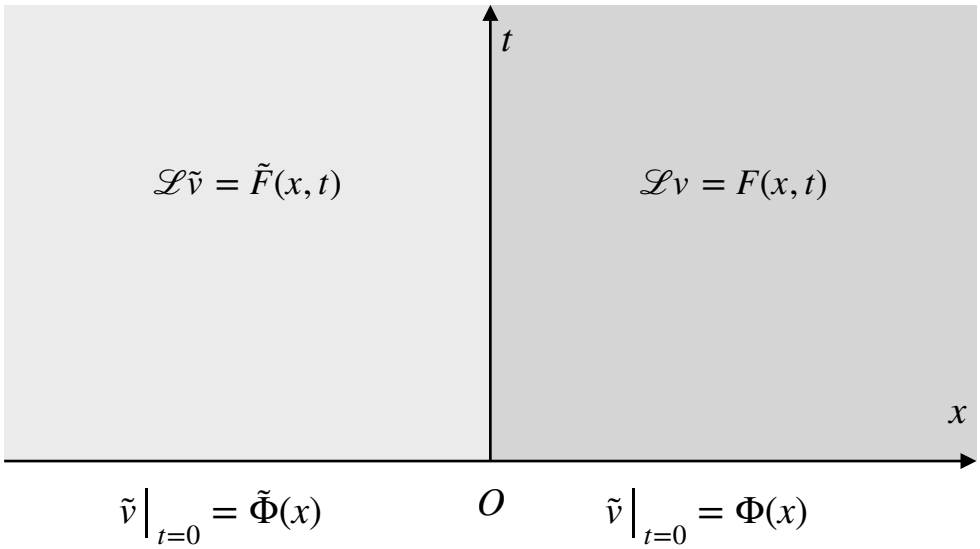
$$\begin{cases} \mathcal{L}v = -\mathcal{L}w, 0 < x < +\infty, 0 < t < T, \\ v\big|_{x=0} = 0, \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x) - w(x,0)\,. \end{cases}$$

Обозначим $F = -\mathcal{L}w$, $\Phi(x) = \varphi(x) - w(x,0)$. Будем решать задачу относительно неизвестной функции v:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = F(x,t), 0 < x < +\infty, 0 < t < T, \\ v\big|_{x=0} = 0; \\ v\big|_{t=0} = \Phi(x)\,. \end{cases} \qquad (3)$$

Замечание. Если $w(x,t) = \nu(t)$, то $F(x,t) = -\mathcal{L}\left(\nu(t)x\right) = -\nu'(t) - 2\nu(t)$; $\Phi(x) = \varphi(x) - \nu(0)$.

3) Осуществим нечётное продолжение данных редуцированной задачи в область $x < 0$.



Осуществим нечётное продолжение неизвестной функции и начальной функции Φ:

- $\tilde{v}(x,t) = -v(-x,t)$ если $x < 0$; $\tilde{v}(x,t) = v(x,t)$ если $x \geqslant 0$;
- $\tilde{\Phi}(x) = -\Phi(-x)$ если $x < 0$; $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x)$ если $x \geqslant 0$;
- $\tilde{F}(x,t) = -F(-x,t)$ если $x < 0$; $\tilde{F}(x,t) = F(x,t)$ если $x \geqslant 0$.

Временно забудем о начально-краевой задаче и будем решать начальную задачу (задачу Коши) вида

$$\begin{cases} \mathscr{L}\tilde{v} = \tilde{F}(x,t),\ -\infty < x < +\infty, 0 < t < T, \\ \tilde{v}\big|_{t=0} = \tilde{\Phi}(x)\,. \end{cases} \tag{4}$$

4) Получим преобразованием Фурье по пространственной переменной x задачу Коши для фурье-образа решения.

Обозначим $V(\xi,t) = \mathscr{F}_x[\tilde{v}(x,t)]$ — фурье-образ (относительно пространственной переменной x) решения задачи (4).

Получим задачу для $V = V(\xi,t)$:

- действуя на начальное условие преобразованием Фурье $\mathscr{F}_x$ имеем $V\big|_{t=0} = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}\right](\xi)$;
- подвергая уравнение задачи (4) преобразованию Фурье $\mathscr{F}_x$, получим:

$$V_t + \left(\xi^2 - i\xi + 2\right) V = \mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,t)\right].$$

Мы получиили задачу Коши для Фурье образа V:

$$\begin{cases} V_t + \left(\xi^2 - i\xi + 2\right) V = \mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,t)\right], 0 < t < T, \\ V\Big|_{t=0} = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right]. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь ξ — параметр. Задачу (5) можно решить стандартными методами теории дифференциальных уравнений, но рассмотрим другой метод, основанный на фундаментальном решении оператора $\mathscr{M} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \xi^2 - i\xi + 2$, которое мы уже построили в первом пункте: $\hat{E} = \mathscr{E}(\xi,t)\theta(t)$, где $\mathscr{E} = e^{-\left(\xi^2 - i\xi + 2\right)t}$. Задача (5) эквивалентна уравнению вида

$$V_t + \left(\xi^2 - i\xi + 2\right) V = \mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,t)\right]\theta(t) + \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right] \otimes \delta(t) \quad (6)$$

в следующем смысле: если взять продолжение решения задачи (5) нулём в область $t < 0$, то оно будет решением уравнения (6). Наоборот, решение уравнения (6) с носителем в $t \geqslant 0$ есть решение задачи (5).

Замечание. Неизвестная функция V и правая часть уравнения (6) принадлежат свёрточной алгебре $\mathcal{S}'[0, +\infty)$.

Решение задачи (6) можно получить свёрткой фундаментального решения оператора $\mathscr{M}$ и правой части уравнения (6):

$$V = \hat{E}(\xi,t) *_t \left(\mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,t)\right]\theta(t) + \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right] \otimes \delta(t)\right) =$$

$$= \hat{E}(\xi,t) *_t \left(\mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,t)\right]\theta(t)\right) + \hat{E}(\xi,t) *_t \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right] \otimes \delta(t) = \ldots$$

Здесь $*_t$ — свёртка относительно переменной времени t.

Принимая во внимание регулярность функций $\hat{E}(\xi,t)$ и $\mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,t)\right]$, имеем $\hat{E}(\xi,t) *_t \left(\mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,t)\right]\theta(t)\right) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,\tau)\right]\theta(\tau)\hat{E}(\xi,t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,\tau)\right]\hat{E}(\xi,t-\tau)d\tau$$

(выражение для $\hat{E}$ на данном этапе не подставляем). Кроме

того, из определения свёртки обобщённых функций и того обстоятельства, что относительно ξ функция $\hat{E}$ есть мультипликатор $\hat{E}(\xi,t) *_t \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right] \otimes \delta(t) = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right]\hat{E}(\xi,t)$.
Итак, решение задачи (5) или эквивалентного ей уравнения (6) имеет вид

$$V = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right]\hat{E}(\xi,t) + \int_0^\infty \mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,\tau)\right]\hat{E}(\xi,t-\tau)d\tau. \quad (7)$$

5) Обратным преобразованием Фурье получим формулу интегрального представления решения, принимая в расчёт построенное в первом пункте фундаментальное решение.

Получим обратное преобразование Фурье функции $V = V(x,t)$, учитывая $\hat{E}(\xi,t) = \mathscr{F}_x[E(x,t)]$:

$$\tilde{v}(x,t) = \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[V(\xi,t)\right] = \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x)\right]\mathscr{F}_x[E(x,t)]\right] +$$

$$+\mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\int_0^\infty \mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,\tau)\right]\mathscr{F}_x[E(x,t-\tau)]d\tau\right] =$$

$$= \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\mathscr{F}_x\left[\tilde{\Phi}(x) *_x E(x,t)\right]\right] + \int_0^\infty \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\mathscr{F}_x\left[\tilde{F}(x,\tau) *_x E(x,t-\tau)\right]\right]d\tau =$$

$$= \tilde{\Phi}(x) *_x E(x,t) + \int_0^\infty \tilde{F}(x,\tau) *_x E(x,t-\tau)d\tau,$$ где $*_x$ — свёртка относительно переменной x. Здесь использовано знаменитое свойство преобразование Фурье и свёртки:
$\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g]$, где $\mathscr{F}[f]$ или $\mathscr{F}[g]$ — мультипликатор Фурье, свёртка $f * g$ существует (на лекции было доказано это соотношение в том случае, когда f или g — финитная о.ф.).

Принимая во внимание, что функции $E(x,t)$, $\tilde{\Phi}(x)$ и $\tilde{F}(x,t)$ регулярны относительно x, а также явное выражение для фундаментального решения $E(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t-\frac{(x-t)^2}{4t}}$, имеем

$$\tilde{v} = \tilde{\Phi}(x) *_x E(x,t) + \int\limits_0^\infty \tilde{F}(x,\tau) *_x E(x,t-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(x-s,t)\tilde{\Phi}(s)ds + \int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(x-s,t-\tau)\tilde{F}(s,\tau)ds =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} \tilde{\Phi}(s)ds + \int\limits_0^\infty \frac{\theta(t-\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-2(t-\tau)} d\tau$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} \tilde{F}(s,\tau)ds = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} \tilde{\Phi}(s)ds + \int\limits_0^t \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} \tilde{F}(s,\tau)ds.$$

6) От интегрирования по прямой $-\infty < x < \infty$ в полученной формуле перейдём к интегрированию по лучу $0 \leqslant x < \infty$.

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} \tilde{\Phi}(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} \tilde{\Phi}(s)ds + \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} \tilde{\Phi}(s)ds =$$

$$= \{\text{в первом интеграле сделаем замену } s \mapsto -s\} =$$

$$= -\int\limits_{+\infty}^{0} e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \tilde{\Phi}(-s)ds + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} \tilde{\Phi}(s)ds = \left\{\tilde{\Phi}(-s) = -\Phi(s)\right\} =$$

$= \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \right) \Phi(s)ds$. Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} \tilde{F}(s,\tau)ds = \int\limits_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} \right) F(s,\tau)ds\,.$$

Учитывая выражения $F(s,\tau) = -\mathscr{L}w = -w_\tau + w_{ss} - w_s - 2w$, $\Phi(s) = \varphi(s) - w(s,0)$, получим интегральную формулу для решения задачи (3) в области $\{0 < x < +\infty, 0 < t < T\}$:

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \right) \big(\varphi(s) - w(s,0)\big)\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \int\limits_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} \right) \big(-w_\tau + w_{ss} - w_s - 2w\big)\, ds,$$

где $w = w(s,t)$ — достаточно хорошая функция с тем свойством, что $w\big|_{x=0} = \nu(t)$. Таким образом, формула для решения начально-краевой задачи имеет вид

$$u(x,t) = w(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \right) \big(\varphi(s) - w(s,0)\big)\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \int\limits_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} \right) \big(-w_\tau + w_{ss} - w_s - 2w\big)\, ds\,.$$

Замечание. В настоящей теме мы не занимаемся вопросами существования и единственности решения начальных/ начально-краевых задач, поэтому и не объясняем, какие функции достаточно хороши.

Если $w(x,t) = \nu(t)$, то интегральная формула принимает вид

$$u(x,t) = \nu(t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \right) \big(\varphi(s) - \nu(0)\big)\, ds +$$

$$+\int_0^t \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+s-(t-\tau))^2}{4(t-\tau)}}\right)\left(-\nu'(\tau)-2\nu(\tau)\right)ds\,.$$

7) Применяя интегральную формулу, найдём единственное решение начально-краевой задачи с указанными правыми частями.

Пусть $\nu(t) = e^{-\alpha t}$, где $\alpha > 0$ — параметр. Тогда $-\nu'(t) - 2\nu(t) = \alpha e^{-\alpha t} - 2e^{\alpha t} = (\alpha - 2)e^{-\alpha t} \Rightarrow$ $-\nu'(t) - 2\nu(t) = 0$ только при $\alpha = 2$. Двойной интеграл в формуле вычислять не хотелось бы, поэтому сделаем такую редукцию, чтобы функция под двойным интегралом была бы равна нулю при любом α. Рассмотрим вариант, когда $w(s,\tau) = e^{-\beta s - \alpha\tau}$, где β — неизвестный параметр, подлежащий определению. Имеем $-\mathscr{L}w = -w_\tau + w_{ss} - w_s - 2w =$

$$= \alpha e^{-\beta s-\alpha t} + \beta^2 e^{-\beta s-\alpha t} + \beta e^{-\beta s-\alpha t} - 2e^{-\beta s-\alpha t} = \left(\beta^2+\beta+\alpha-2\right)e^{-\beta s-\alpha t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \beta + \alpha - 2 = 0.$$

- $0 < \alpha < \frac{9}{4}$: $\beta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(\alpha-2)}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\alpha}$.

  Далее работаем с корнем $\beta = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-\alpha}$.
- $\alpha = \frac{9}{4}$: $\beta_1 = \beta_2 = -\frac{1}{2}$.
- $\alpha > \frac{9}{4}$: $\beta_{1,2} = = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\alpha - \frac{9}{4}}$. Далее работаем с корнем $\beta = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\alpha-\frac{9}{4}}$.

Запишем рабочие формулы для вычисления решения:

- $0 < \alpha < \frac{9}{4}$: $u(x,t) = e^{-\beta x - \alpha t} + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \right) \left(\cos s - e^{-\beta s} \right) ds$, где $\beta = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \alpha}$;
- $\alpha = \frac{9}{4}$: $u(x,t) = e^{\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}t} + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \right) \left(\cos s - e^{\frac{1}{2}s} \right) ds$;
- $\alpha > \frac{9}{4}$: $\beta = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\alpha - \frac{9}{4}}$, $\omega = \sqrt{\alpha - \frac{9}{4}}$,

  $u(x,t) = e^{\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}t} \left(\cos \omega x + i \sin \omega x \right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-2t} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4t}} \right) \left(\cos s - e^{\frac{1}{2}s} \cos \omega s - e^{\frac{1}{2}s} \sin \omega s \right) ds.$

8) Визуализируем в MAPLE полученное в предыдущем пункте решение.

• Кейс 0<α<9/4

```
restart;
with(plots):
alpha := 2;
```

$$\alpha := 2$$

```
beta := -1/2 + sqrt(9/4 - alpha);
```

$$\beta := 0$$

```
nub := t->exp(-alpha·t);
```

$$nub := t \mapsto e^{-\alpha \cdot t}$$

Зададим функцию, участвующую в редукции:

```
w := (x, t)->exp(-beta·x - alpha·t);
```

$$w := (x, t) \mapsto e^{-\beta \cdot x - \alpha \cdot t}$$

Зададим начальную функцию:

```
phi := x→cos(x);
```

$$\phi := x \mapsto \cos(x)$$

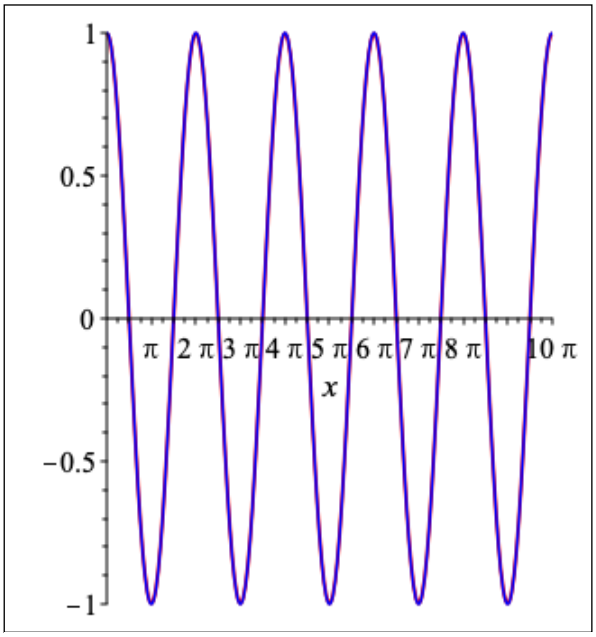
Получим решение:

```
u1 := (x, t)→w(x, t) + 1/(2·sqrt(Pi·t))·exp(-2·t)·int(((exp(-(x-s-t)^2/(4·t))-exp(-(x+s-t)^2/(4·t)))·(phi(s)-w(s,0))), s=0..infinity);
```

$$u1 := (x, t) \mapsto w(x, t) + \frac{e^{-2 \cdot t} \cdot \left(\int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4 \cdot t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4 \cdot t}} \right) \cdot (\phi(s) - w(s, 0)) \, ds \right)}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot t}}$$

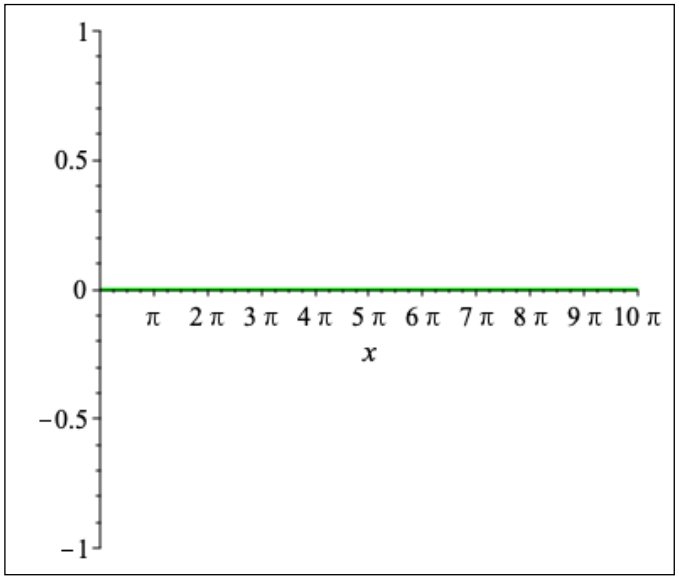
Проверим начальное условие:

```
plot([Re(u1(x, 0.001)), phi(x)], x=0..10·Pi, color=[red, blue]);
```



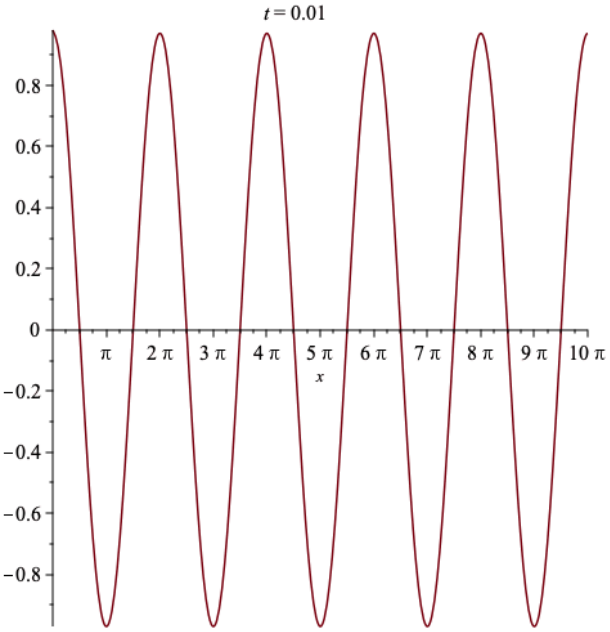
Проверим, что мнимая часть *u1(x,0.001)* равна нулю:

```
plot(Im(u1(x, 0.001)), x=0..10·Pi, color=[green]);
```



Построим анимацию решения:

$animate(plot, [\mathrm{Re}(u1(x,t))], x=0..10\cdot \mathrm{Pi}], t=0.01..0.5, frames=200);$



• Кейс α=9/4

```
restart;
with(plots):
alpha := 9/4;
```

$$\alpha := \frac{9}{4}$$

```
beta := -1/2 + sqrt(9/4 - alpha);
```

$$\beta := -\frac{1}{2}$$

```
nub := t->exp(-alpha*t);
```

$$nub := t \mapsto e^{-\alpha\cdot t}$$

Зададим функцию, участвующую в редукции:

```
w := (x,t)->exp(-beta*x - alpha*t);
```

$$w := (x,t) \mapsto e^{-\beta\cdot x - \alpha\cdot t}$$

Зададим начальную функцию:

```
phi := x->cos(x);
```

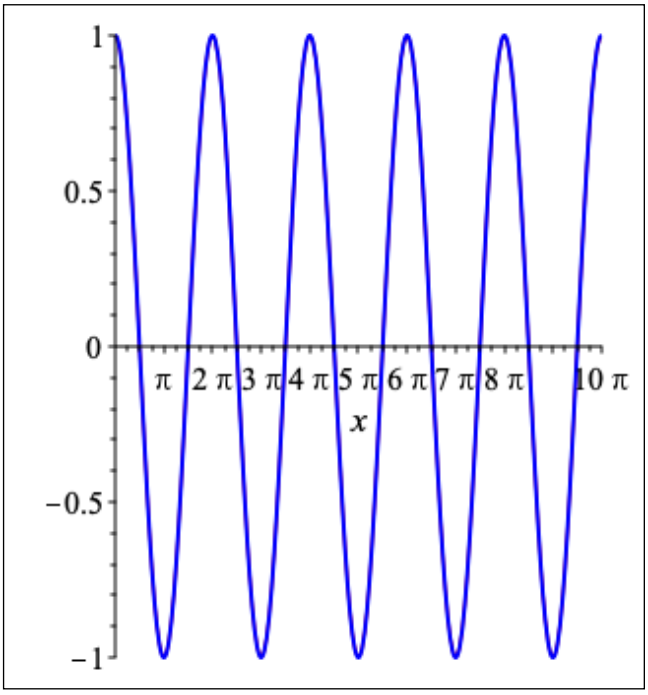
$$\phi := x \mapsto \cos(x)$$

```
u2 := (x,t)->w(x,t) + 1/(2*sqrt(Pi*t))*exp(-2*t)*int((exp(-(x-s-t)^2/(4*t)) - exp(-(x+s-t)^2/(4*t)))*(phi(s) - w(s,0)), s=0..infinity);
```

$$u2 := (x,t) \mapsto w(x,t) + \frac{e^{-2\cdot t}\cdot\left(\int_0^{\infty}\left(e^{-\frac{(x-s-t)^2}{4\cdot t}} - e^{-\frac{(x+s-t)^2}{4\cdot t}}\right)\cdot(\phi(s) - w(s,0))\,ds\right)}{2\cdot\sqrt{\pi\cdot t}}$$

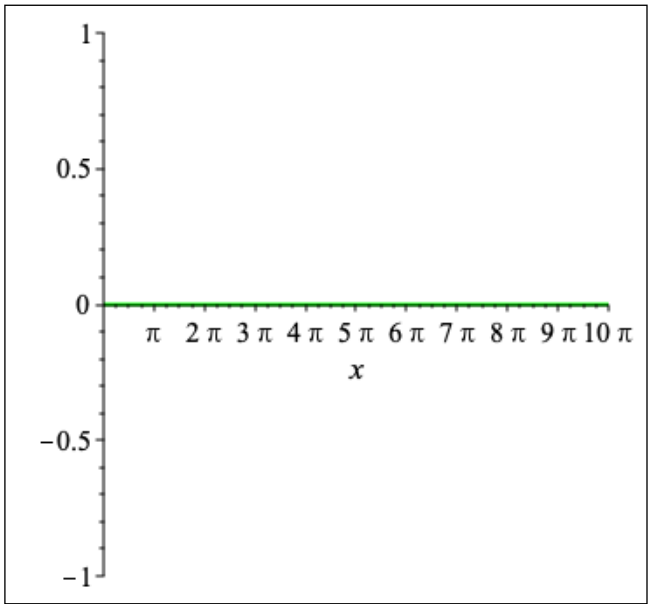
Проверка начального условия:

$plot([\mathrm{Re}(u2(x, 0.001))], \mathrm{phi}(x)], x = 0..10\cdot\mathrm{Pi}, color = [red, blue])$;



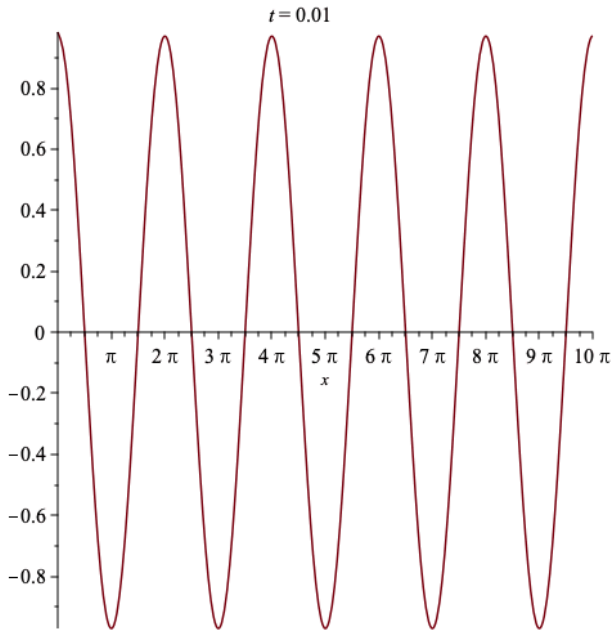
Проверим, что мнимая часть *u2(x,0.001)* равна нулю:

$plot(\mathrm{Im}(u2(x, 0.001))), x = 0..10\cdot\mathrm{Pi}, color = [green])$;



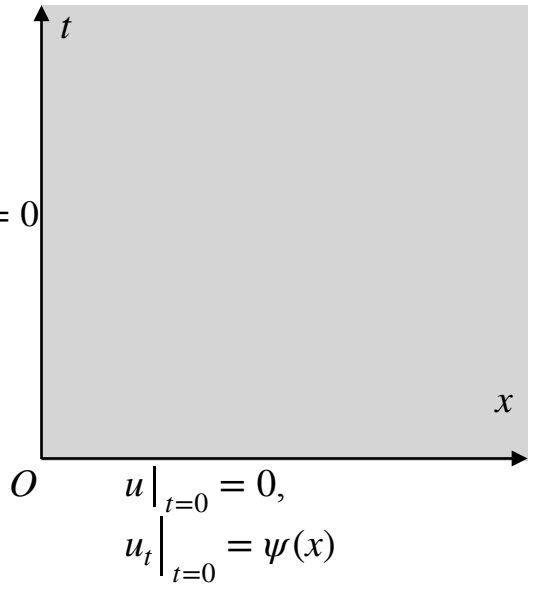
Построим анимацию решения:

$animate(plot, [\mathrm{Re}(u2(x,t))), x = 0..10\cdot\mathrm{Pi}], t = 0.01..0.5, frames = 200)$;



Пример #4.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + f(x,t), \\ 0 < x < +\infty, 0 < t < T, \\ -u_x\big|_{x=0} = 0; \\ u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$



$f(x,t) = e^{-t}\cos x,\ \psi(x) = \sin x.$

- $-u_x\big|_{x=0} = 0$ — краевое условие;
- $u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$ — начальные условия.

1) Методом преобразования Фурье построим фундаментальное решение оператора задачи.

Рассмотрим общую проблему построения фундаментального решения оператора

$$\mathscr{L}u = u_{tt} - u_{xx} + au_x + bu_t + cu,$$

где $a, b, c = \text{cosnt}$. Уравнение для фундаментального решения имеет вид

$$E_{tt} - E_{xx} + aE_x + bE_t + cE = \delta(x,t). \quad (2.1)$$

Сделаем замену $E(x,t) = e^{\alpha x+\beta t}G(x,t)$, цель которой уничтожить первые производные в уравнении (2.1). Имеем

$E_x = \alpha e^{\alpha x+\beta t}G + e^{\alpha x+\beta t}G_x$, $E_t = \beta e^{\alpha x+\beta t}G + e^{\alpha x+\beta t}G_t$,

$$E_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha e^{\alpha x+\beta t}G + e^{\alpha x+\beta t}G_x\right) = e^{\alpha x+\beta t}G_{xx} + 2\alpha e^{\alpha x+\beta t}G_x + \alpha^2 e^{\alpha x+\beta t}G,$$

$$E_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\beta e^{\alpha x+\beta t}G + e^{\alpha x+\beta t}G_t\right) = e^{\alpha x+\beta t}G_{tt} + 2\beta e^{\alpha x+\beta t}G_t + \beta^2 e^{\alpha x+\beta t}G,$$

а уравнение преобразуется к виду

$$e^{\alpha x+\beta t}G_{tt} + 2\beta e^{\alpha x+\beta t}G_t + \beta^2 e^{\alpha x+\beta t}G - e^{\alpha x+\beta t}G_{xx} - 2\alpha e^{\alpha x+\beta t}G_x - \alpha^2 e^{\alpha x+\beta t}G +$$
$$+ a\alpha e^{\alpha x+\beta t}G + ae^{\alpha x+\beta t}G_x + b\beta e^{\alpha x+\beta t}G + be^{\alpha x+\beta t}G_t + ce^{\alpha x+\beta t}G = \delta(x,t).$$

Сократим на $e^{\alpha x+\beta t}$ и привём подобные слагаемые:

$$G_{tt} - G_{xx} + (a-2\alpha)G_x + \left(b+2\beta\right)G_t + \left(c - \alpha^2 + \beta^2\right)G = e^{-\alpha x-\beta t}\delta(x,t) = \delta(x,t).$$

Пусть $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$, $\gamma = c - \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$G_{tt} - G_{xx} + \gamma G = \delta(x,t).$$

Рассмотрим два случая — простой и сложный.

- Простой случай, когда $\gamma = 0$. Пусть $\hat{G}(\xi,t) = \mathscr{F}_x\left[G(x,t)\right]$; уравнение для $\hat{G}$ имеет вид

$$\hat{G}_{tt} + \xi^2\hat{G} = \delta(t) \;\Rightarrow\; \hat{G}(\xi,t) = \theta(t)\frac{\sin\xi t}{\xi}.$$

Найдём обратное преобразование Фурье:

$G(x,t) = \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin\xi t}{\xi}\right] = \frac{1}{2\pi}\theta(t)\mathscr{F}_\xi\left[\frac{\sin\xi t}{\xi}\right]$. Мы не можем найти его через интеграл, потому что $\frac{\sin\xi t}{\xi} \notin L_p(\mathbb{R})$ ни при каких $p \in [1,\infty)$ и $t \neq 0$. Поэтому найдём его по определению:

$$\left(\mathscr{F}_\xi\left[\frac{\sin\xi t}{\xi}\right], \varphi\right) = \left(\frac{\sin\xi t}{\xi}, \mathscr{F}_\xi[\varphi(x)]\right) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin\xi t}{\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\xi x}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin \xi t}{\xi} e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi t}{\xi} e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}}{\xi} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x+t)} - e^{i\xi(x-t)}}{\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left(i\pi \operatorname{sign}(x+t) - i\pi \operatorname{sign}(x-t)\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \pi\theta(t - |x|)\varphi(x)dx.$$

Следовательно, $G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\pi\theta(t-|x|)\theta(t) = \frac{1}{2}\theta(t-|x|) \Rightarrow$

$E(x,t) = \frac{1}{2} e^{\frac{a}{2}x - \frac{b}{2}t} \theta(t-|x|)$.

- Сложный случай, когда $\gamma \neq 0$. Пусть $\hat{G}(\xi,t) = \mathscr{F}_x\left[G(x,t)\right]$; уравнение для $\hat{G}$ имеет вид

$$\hat{G}_{tt} + \left(\xi^2 + \gamma\right)\hat{G} = \delta(t) \Rightarrow \hat{G}(\xi,t) = \theta(t)X(\xi,t), \text{ где}$$

$X = X(x,t)$ есть решение задачи Коши вида

$$\begin{cases} X_{tt} + \left(\xi^2 + \gamma\right) X = 0, \\ X(0) = 0, X'(0) = 1. \end{cases}$$

Имеют место ещё два подслучая:

A. $\gamma > 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\xi^2 + \gamma}$, $X(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$, $\hat{G}(t) = \theta(t)\frac{\sin \omega t}{\omega}$.

B. $\gamma < 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\xi^2 + \gamma}$ при $|\xi| > \sqrt{-\gamma}$ и $X(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$, $\omega = \sqrt{-\xi^2 - \gamma}$ при $|\xi| < \sqrt{-\gamma}$ и $X(t) = \frac{\sinh \omega t}{\omega}$. Но $\sin i\omega t = i \sinh \omega t$, поэтому $X(t) = \frac{i \sinh \omega t}{i\omega} = \frac{\sin i\omega t}{i\omega}$, и формула из случая A подходит и здесь, т.к. $i\omega = \sqrt{\xi^2 + \gamma}$.

Итак, в любом случае $X(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$, $\hat{G} = \theta(t)\frac{\sin \omega t}{\omega} =$

$$= \theta(t)\frac{\sin t\sqrt{\xi^2+\gamma}}{\sqrt{\xi^2+\gamma}} \Rightarrow G(x,t) = \mathscr{F}_{\xi}^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin t\sqrt{\xi^2+\gamma}}{\sqrt{\xi^2+\gamma}}\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\theta(t-|x|)J_0\left(\sqrt{\gamma(t^2-x^2)}\right) \text{ при } \gamma > 0, \\ \frac{1}{2}\theta(t-|x|)I_0\left(\sqrt{\gamma(x^2-t^2)}\right) \text{ при } \gamma < 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta(t-|x|)e^{\frac{a}{2}x-\frac{b}{2}t}J_0\left(\sqrt{\gamma(t^2-x^2)}\right) \text{ при } \gamma > 0, \\ \frac{1}{2}\theta(t-|x|)e^{\frac{a}{2}x-\frac{b}{2}t}I_0\left(\sqrt{\gamma(x^2-t^2)}\right) \text{ при } \gamma < 0. \end{cases}$$

Здесь $J_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$ — функция Бесселя индекса нуль, $I_0(z) = J_0(iz)$. Замечание: формулы выше справедливы и при $\gamma = 0$, потому что $J_0(0) = I_0(0) = 0$.

Таким образом, фундаментальное решение оператора задачи $\mathscr{L}u = u_{tt} - u_{xx} + u$ имеет вид

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\theta(t-|x|)J_0\left(\sqrt{t^2-x^2}\right). \quad (2.2)$$

Редукция здесь не требуется (краевое условие однородно), поэтому переходим к следующему пункту решения.

3) Осуществим чётное продолжение решения и данных начально-краевой задачи в область $x < 0$.

Осуществим чётное продолжение неизвестной функции, правой части уравнения и начальных функций:

- $\tilde{u}(x,t) = u(-x,t)$ если $x < 0$; $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)$ если $x \geqslant 0$;
- $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$ если $x < 0$; $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ если $x \geqslant 0$;
- $\tilde{f}(x,t) = f(-x,t)$ если $x < 0$; $\tilde{f}(x,t) = f(x,t)$ если $x \geqslant 0$.

Забудем о начально-краевой задаче и будем решать начальную задачу (задачу Коши) вида

$$\begin{cases} \mathscr{L}\tilde{u} = \tilde{f}(x,t),\ -\infty < x < +\infty, 0 < t < T, \\ \tilde{u}\big|_{t=0} = 0,\ \tilde{u}_t\big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x)\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

4) Получим преобразованием Фурье по пространственной переменной x задачу Коши для фурье-образа решения.

Обозначим $U(\xi,t) = \mathscr{F}_x[\tilde{u}(x,t)]$ — фурье-образ (относительно пространственной переменной x) решения задачи (2.3).

Получим задачу для $U = U(\xi,t)$:

- действуя на начальные условие преобразованием Фурье $\mathscr{F}_x$ имеем $U\big|_{t=0} = 0,\ U_t\big|_{t=0} = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}\right](\xi)$;
- подвергая уравнение задачи (2.3) преобразованию Фурье $\mathscr{F}_x$, получим:

$$U_{tt} + \left(\xi^2 + 1\right) U = \mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,t)\right].$$

Мы получиили задачу Коши для Фурье образа V:

$$\begin{cases} U_{tt} + \left(\xi^2 + 1\right) U = \mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,t)\right], 0 < t < T, \\ U\big|_{t=0} = 0,\ U_t\big|_{t=0} = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right]. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь ξ — параметр. Задачу (2.4) можно решить стандартными методами теории дифференциальных уравнений, но рассмотрим другой метод, основанный на фундаментальном решении оператора $\mathscr{M} = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 t} + \xi^2 + 1$, которое мы уже построили в первом пункте:

$\hat{G}(\xi,t) = \theta(t)\dfrac{\sin t\sqrt{\xi^2+1}}{\sqrt{\xi^2+1}}$. Задача (2.4) эквивалентна уравнению вида

$$U_{tt} + \left(\xi^2 + 1\right) U = \mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,t)\right] \theta(t) + \mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right] \otimes \delta(t) \quad (2.5)$$

в следующем смысле: если взять продолжение решения задачи (2.4) нулём в область $t < 0$, то оно будет решением уравнения (2.5). Наоборот, решение уравнения (6) с носителем в $t \geqslant 0$ есть решение задачи (2.5).

Замечание. Неизвестная функция U и правая часть уравнения (2.5) принадлежат свёрточной алгебре $\mathcal{S}'[0, +\infty)$.

Решение задачи (2.4) можно получить свёрткой фундаментального решения оператора $\mathscr{M}$ и правой части уравнения (2.5):

$$U = \hat{G}(\xi,t) *_t \left(\mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,t)\right] \theta(t) + \mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right] \otimes \delta(t)\right) =$$

$$= \hat{G}(\xi,t) *_t \left(\mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,t)\right] \theta(t)\right) + \hat{G}(\xi,t) *_t \left(\mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right] \otimes \delta(t)\right) = \ldots$$

Здесь $*_t$ — свёртка относительно переменной времени t.

Принимая во внимание регулярность функций $\hat{G}(\xi,t)$ и $\mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,t)\right]$, имеем $\hat{G}(\xi,t) *_t \left(\mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,t)\right] \theta(t)\right) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,\tau)\right] \theta(\tau) \hat{G}(\xi, t-\tau) d\tau = \int\limits_{0}^{\infty} \mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,\tau)\right] \hat{G}(\xi, t-\tau) d\tau$$

(выражение для $\hat{G}$ на данном этапе не подставляем). Кроме того, из определения свёртки обобщённых функций и того обстоятельства, что относительно ξ функция $\hat{G}$ есть мультипликатор, следует

$\hat{G}(\xi,t) *_t \mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right] \otimes \delta(t) = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right] \hat{G}(\xi,t)$. Итак, решение задачи (2.4) или эквивалентного ей уравнения (2.5) имеет вид

$$U = \mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right] \hat{G}(\xi,t) + \int\limits_{0}^{\infty} \mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,\tau)\right] \hat{G}(\xi, t-\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

5) Обратным преобразованием Фурье получим формулу интегрального представления решения, принимая в

расчёт построенное в первом пункте фундаментальное решение.

Получим обратное преобразование Фурье функции $U = U(x,t)$, учитывая $\hat{G}(\xi,t) = \mathscr{F}_x[E(x,t)]$:

$$\tilde{u}(x,t) = \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[U(\xi,t)\right] = \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x)\right]\mathscr{F}_x[E(x,t)]\right] +$$

$$+\mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\int_0^\infty \mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,\tau)\right]\mathscr{F}_x[G(x,t-\tau)]d\tau\right] =$$

$$= \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\mathscr{F}_x\left[\tilde{\psi}(x) *_x E(x,t)\right]\right] + \int_0^\infty \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\mathscr{F}_x\left[\tilde{f}(x,\tau) *_x G(x,t-\tau)\right]\right] d\tau =$$

$$= \tilde{\psi}(x) *_x G(x,t) + \int_0^\infty \tilde{f}(x,\tau) *_x G(x,t-\tau)d\tau, \text{ где } *_x \text{ — свёртка}$$

относительно переменной x. Здесь использовано знаменитое свойство преобразование Фурье и свёртки:
$\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g]$, где $\mathscr{F}[f]$ или $\mathscr{F}[g]$ — мультипликатор Фурье, свёртка $f * g$ существует (на лекции было доказано это соотношение в том случае, когда f или g — финитная о.ф.).
Принимая во внимание, что функции $G(x,t)$, $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{f}(x,t)$ регулярны относительно x, а также явное выражение для фундаментального решения (2.2), имеем

$$\tilde{u} = \tilde{\psi}(x) *_x G(x,t) + \int_0^\infty \tilde{f}(x,\tau) *_x G(x,t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t)\tilde{\psi}(s)ds + \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t-\tau)\tilde{f}(s,\tau)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\tilde{\psi}(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} J_0\left(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-s)^2}\right)\tilde{f}(s,\tau)ds\,.$$

6) От интегрирования по прямой $-\infty < x < \infty$ в полученной формуле перейдём к интегрированию по лучу $0 \leqslant x < \infty$.

Пусть $x > 0$ и $t > 0$. Рассмотрим два случая:

- $x - t > 0 \Leftrightarrow x > t$: $\dfrac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\tilde{\psi}(s)ds =$

$= \dfrac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds$; тем более, $x > t - \tau$,

поэтому $\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} J_0\left(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-s)^2}\right)\tilde{f}(s,\tau)ds =$

$= \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} J_0\left(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-s)^2}\right)f(s,\tau)ds.$

- $x - t < 0 \Leftrightarrow x < t$: $\dfrac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\tilde{\psi}(s)ds =$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(-s)ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{t-x}^{0} J_0\left(\sqrt{t^2-(x+s)^2}\right)\psi(s)ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{t-x} J_0\left(\sqrt{t^2-(x+s)^2}\right)\psi(s)ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)\,.$$

Перепишем предыдущий случай аналогичным образом:

$$\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x-t} - J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(s)ds\,.$$

Отметим, однако, что с технической т.зр. предпочтительнее оставить формулу из пункта 5, принимая во внимание чётное продолжение функций f и ψ. Тогда можно записать:

$$u = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\psi(|s|)ds + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} J_0\left(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-s)^2}\right) f(|s|,\tau)ds\,. \qquad (2.7)$$

7) Применяя интегральную формулу, найдём единственное решение начально-краевой задачи с указанными правыми частями.

Подставим правые части $\psi(x) = \sin x$ и $f(x,t) = e^{-t}\cos x$ в формулу (2.7) и сделаем очевидные преобразования:

$$u = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-s)^2}\right)\sin|s|\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} J_0\left(\sqrt{(t-\tau)^2-(x-s)^2}\right)\cos s\,ds\,.$$

Воздержавшись от дальнейших преобразований получившихся интегралов, приступим к визуализации.

8) Визуализируем в MAPLE полученное в предыдущем пункте решение.

```
restart;
with(plots) :
```

Зададим правую часть уравнения:

```
f := (x, t)→exp(-t)·cos(x);
```

$$f := (x, t) \mapsto e^{-t} \cdot \cos(x)$$

Зададим начальную функцию:

```
psi := x→sin(x);
```

$$\psi := x \mapsto \sin(x)$$

Получим решение:

```
u := (x, t)→1/2·int(BesselJ(0, sqrt(t^2 - (x - s)^2))·psi(sqrt(s^2)), s = x - t..x + t) + 1/2·int(int(BesselJ(0, sqrt((t - tau)^2 - (x - s)^2))
    ·f(sqrt(s^2), tau), s = x - (t - tau)..x + t - tau), tau = 0..t);
```

$$u := (x, t) \mapsto \frac{\left(\int_{x-t}^{x+t} \mathrm{BesselJ}\left(0, \sqrt{t^2 - (x-s)^2}\right) \cdot \psi\left(\sqrt{s^2}\right) \mathrm{d}s\right)}{2} + \frac{\left(\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \mathrm{BesselJ}\left(0, \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-s)^2}\right) \cdot f\left(\sqrt{s^2}, \tau\right) \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\tau\right)}{2}$$

Для визуализации заменим точное решение на приближённое, взяв многочлен Тейлора для функции Бесселя (ряд Тейлора для функции Бесселя индекса нуль сходится быстро, поэтому даже многочлен небольшой степени хорошо функцию Бесселя представляет)

```
BesselJ0pol := mtaylor(BesselJ(0, z), z = 0, 12);
```

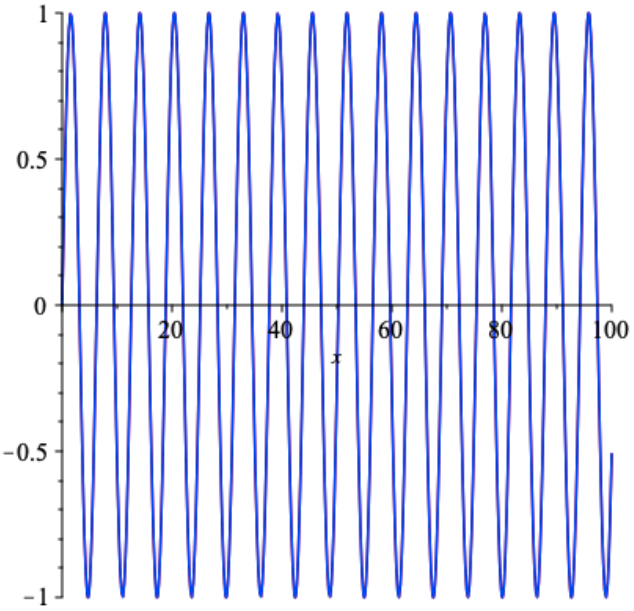
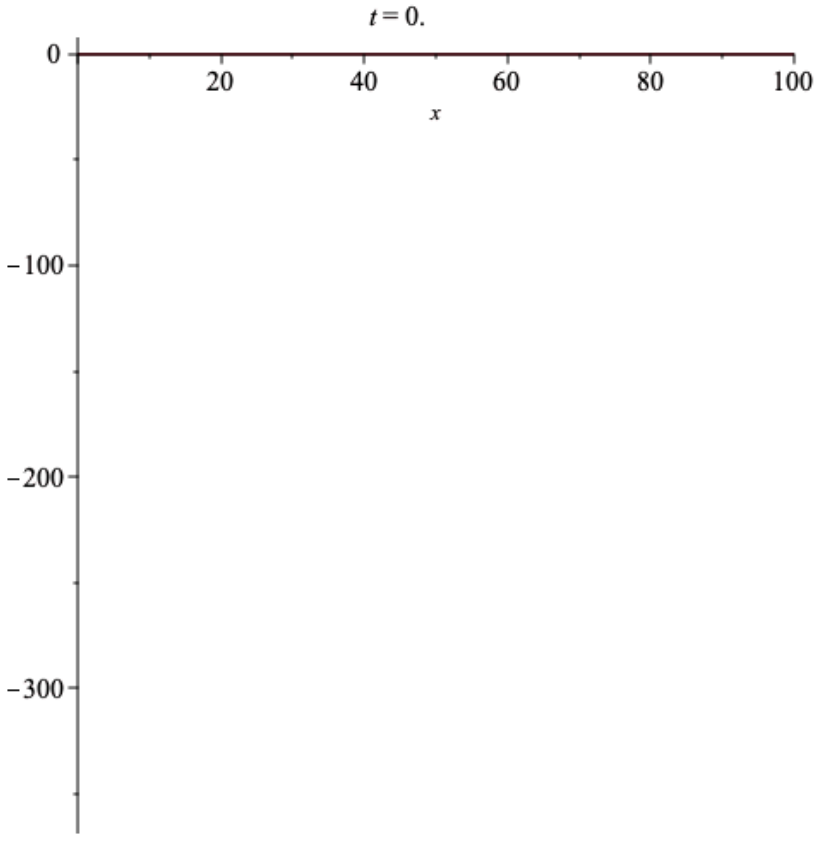
$$BesselJ0pol := 1 - \frac{1}{4} z^2 + \frac{1}{64} z^4 - \frac{1}{2304} z^6 + \frac{1}{147456} z^8 - \frac{1}{14745600} z^{10}$$

```
uapprox := 1/2·int(subs(z = sqrt(t^2 - (x - s)^2), BesselJ0pol)·psi(sqrt(s^2)), s = x - t..x + t) + 1/2·int(int(subs(z = sqrt((t - tau)^2 - (x
    - s)^2), BesselJ0pol)·f(sqrt(s^2), tau), s = x - (t - tau)..x + t - tau), tau = 0..t);
```

$$\begin{aligned}
uapprox := {} & \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^8 x^2}{5898240} - \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^6 x^4}{2949120} + \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^4 x^6}{2949120} - \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^2 x^8}{5898240} - \frac{7\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^6 x^2}{737280} \\
& + \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^4 x^4}{98304} - \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^2 x^6}{245760} + \frac{\sin(x+t)\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^5}{7680} + \frac{13\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^4 x^2}{24576} - \frac{13\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^2 x^4}{24576} \\
& + \frac{\cos(x+t)\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^4}{1536} - \frac{17\sin(x+t)\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^3}{1536} - \frac{19\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^2 x^2}{2048} + \frac{\cos(x+t)\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^2}{256} \\
& + \frac{105\sin(x+t)\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t}{512} - \frac{t^4 \sin(x+t)}{1536} + \frac{17 t^2 \sin(x+t)}{1024} - \frac{t^4 \sin(-x+t)}{1536} + \frac{17 t^2 \sin(-x+t)}{1024} \\
& + \frac{83\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^4}{12288} + \frac{23\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, x^4}{12288} - \frac{109\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^2}{1024} + \frac{105\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, x^2}{1024} - \frac{151\,\mathrm{csgn}(-x+t)\cos(-x+t)}{512} \\
& - \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^{10}}{29491200} + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, x^{10}}{29491200} + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^8}{327680} + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, x^8}{2949120} - \frac{73\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^6}{368640} + \frac{73\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, x^6}{368640} \\
& + \frac{151\,\mathrm{csgn}(-x+t)}{512} + \frac{t^4 \cos(-x+t)}{3072} + \frac{3 t^2 \cos(-x+t)}{512} + \frac{\sin(-x+t)\, t^5}{15360} - \frac{5\sin(-x+t)\, t^3}{1024} + \frac{41\sin(-x+t)\, t}{512} \\
& - \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^{10}}{29491200} + \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, x^{10}}{29491200} + \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, t^8}{327680} + \frac{\mathrm{csgn}(x+t)\, x^8}{2949120} - \frac{73\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^6}{368640} + \frac{73\,\mathrm{csgn}(x+t)\, x^6}{368640} \\
& + \frac{83\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^4}{12288} + \frac{23\,\mathrm{csgn}(x+t)\, x^4}{12288} - \frac{109\,\mathrm{csgn}(x+t)\, t^2}{1024} + \frac{105\,\mathrm{csgn}(x+t)\, x^2}{1024} - \frac{151\cos(x+t)\,\mathrm{csgn}(x+t)}{512} \\
& + \frac{29\, t\cos(-x+t)}{256} - \frac{23 t^3 \cos(x+t)}{3072} - \frac{23 t^3 \cos(-x+t)}{3072} + \frac{29\, t\cos(x+t)}{256} + \frac{t^5 \cos(x+t)}{15360} + \frac{t^5 \cos(-x+t)}{15360} \\
& + \frac{3 t^2 \cos(x+t)}{512} + \frac{t^4 \cos(x+t)}{3072} + \frac{13\sin(x+t)}{256} - \frac{21\cos(x+t)}{128} + \frac{\sin(x+t)\, t^5}{15360} - \frac{5\sin(x+t)\, t^3}{1024} + \frac{41\sin(x+t)\, t}{512} \\
& + \frac{21\cos(x)\, e^{-t}}{64} + \frac{13\sin(-x+t)}{256} - \frac{21\cos(-x+t)}{128} + \frac{151\,\mathrm{csgn}(x+t)}{512} + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^8 x^2}{5898240} - \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^6 x^4}{2949120} \\
& + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^4 x^6}{2949120} - \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^2 x^8}{5898240} - \frac{7\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^6 x^2}{737280} + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^4 x^4}{98304} - \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^2 x^6}{245760} \\
& + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\sin(-x+t)\, t^5}{7680} + \frac{13\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^4 x^2}{24576} - \frac{13\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^2 x^4}{24576} + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\cos(-x+t)\, t^4}{1536} \\
& - \frac{17\,\mathrm{csgn}(-x+t)\sin(-x+t)\, t^3}{1536} - \frac{19\,\mathrm{csgn}(-x+t)\, t^2 x^2}{2048} + \frac{\mathrm{csgn}(-x+t)\cos(-x+t)\, t^2}{256} + \frac{105\,\mathrm{csgn}(-x+t)\sin(-x+t)\, t}{512}
\end{aligned}$$

Проверим второе начальное условие:

```
plot([subs(t=0, diff(uapprox, t)), psi(x)], x=0..100, color=[red, blue]);
```



Построим анимацию решения: