# ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных»

## Тема 1 2 «Разделение переменных в полярных координатах»

Пусть $\rho, \theta$ — полярные координаты. Рассмотрим уравнение Лапласа

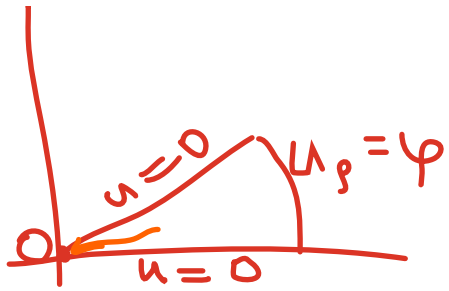
$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

в одной из следующих областей: круг, кольцо, полукруг, полукольцо или сектор круга. Требуется найти интегральное представление решения краевой задачи, выполнив разделение в полярных координатах. Для этого:

1) получить и решить спектральную задачу (задачу Штурма —Лиувилля);
2) представить решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи, предварительно разложив в аналогичный ряд правую часть уравнения/краевого условия;
3) подставить этот ряд в краевую задачу и получить краевые задачки относительно коэффициентов разложения (коэффициентов Фурье);
4) решить краевые задачки и найти коэффициенты Фурье;
5) получить формулу интегрального представления решения краевой задачи и просуммировать ядро;
6) найти коэффициенты Фурье для указанной правой части уравнения/краевого условия, представить решение в виде ряда, визуализировать приближение Фурье достаточной глубины.

**Пример.** Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения Лапаса в секторе 30°:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\rho\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u\big|_{\theta=0} = 0, \\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0. \end{cases}$$




Асимптотическое условие:

$\max_\theta |u(\rho,\theta)| = o(1), \quad \rho \to 0$

Рассмотреть следующую граничную функцию $\varphi(\theta) = 1$.

Обозначение:

$$\Omega = \left\{ x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \right\}.$$

**1) Получим и решим спектральную задачу (задачу Штурма—Лиувилля).**

Найдём нетривиальные гармонические функции в секторе $\Omega$, имеющие вид $U(\rho,\theta) = Z(\rho)Y(\theta)$. Подстановка в уравнение Лапласа и краевые условия $U\big|_{\theta=0} = 0$, $U\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0$ даёт соотношения

$$Z''(\rho)Y(\theta) + \frac{1}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta) + \frac{1}{\rho^2}Z(\rho)Y''(\theta) = 0,$$

$$Z(\rho)Y(0) = 0, Z(\rho)Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Из краевых условий и нетривиальности функций $Z$ и $Y$ следует, что $Y(0) = 0$, $Y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z(\rho)}{Z(\rho)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda = \text{const},$$

поскольку $\rho$ и $\theta$ — независимые переменные. Спектральная задача (задача Штурма—Лиувилля) имеет вид

$$\begin{cases} -Y''(\theta) = \lambda Y(\theta), 0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}, \\ Y(0) = 0, \\ Y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решим задачу Штурма—Лиувилля (1). Пусть $l = \dfrac{\pi}{6}$.

Рассмотрим три случая.

a) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Общее решение уравнения $Y'' - \omega^2 Y = 0$ есть $Y = C_1 e^{-\omega\theta} + C_2 e^{\omega\theta}$. Подставим общее решение в краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\omega l} + C_2 e^{\omega l} = 0. \end{cases}$$

Перед нами система линейных однородным алгебраических уравнений. Нетривиальное решение системы существует тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega l} & e^{\omega l} \end{vmatrix} = e^{\omega l} - e^{-\omega l} = 0. \text{ Отсюда } e^{2\omega l} = 1.$$

Последнее невозможно, потому что $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$.

b) Пусть $\lambda = 0$. Общее решение уравнения $Y'' = 0$ есть $Y = C_1\theta + C_2$. Результат подстановки в краевые условия: $C_2 = 0$, $C_1 l + C_2 = 0$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не собственное значение.

c) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения $Y'' + \omega^2 Y = 0$ есть $Y = C_1 \cos\omega\theta + C_2 \sin\omega\theta$. Подстановка общего решения в краевые условия приводит к системе

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos \omega l + C_2 \sin \omega l = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\sin \omega l = 0$. Отсюда $\omega_k = \dfrac{\pi k}{l}$, $k \in \mathbb{N}$.

Итак, собственные значения задачи Штурма—Лиувилля (2) есть $\lambda_k = \dfrac{\pi^2 k^2}{l^2} = (6k)^2$, $k \in \mathbb{N}$, а соответствующие собственные функции имеют вид $X_k(x) = b_k \sin(6k\theta)$, $b_k \neq 0$.

**2) Представим решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи, предварительно разложив в аналогичный ряд правую часть уравнения/краевого условия.**

Функция $\varphi \in L_2\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$, поэтому она допускает разложение в ряд по собственным функциям из пункта 1). Это разложение имеет вид тригонометрического ряда Фурье

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(6k\theta),$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формуле

$b_k = 1$

$\varphi_k = \dfrac{(\varphi, \sin(6k\theta))_{L_2}}{(\sin(6k\theta), \sin(6k\theta))_{L_2}}$

$$\varphi_k = \frac{12}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varphi(\tau) \sin(6k\tau) d\tau, \qquad (3)$$

которая следует из общей формулы для коэффициентов Фурье функции $\varphi \in L_2\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ относительно ортогонального базиса $\{e_1, e_2, \ldots\}$:

$$\varphi_k = \frac{(\varphi, e_k)}{\|e_k\|^2}. \quad = (e_k, e_k)$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в пространстве $L_2\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$; $\| \sin(6k\theta) \|^2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(6k\theta)d\theta =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(12k\theta)\right) d\theta = \frac{\pi}{12}$. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в секторе 30° будем искать в виде аналогичного разложения

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho)\sin(6k\theta). \quad (4)$$

**3) Подставить этот ряд в краевую задачу и получить краевые задачки относительно коэффициентов разложения (коэффициентов Фурье).**

Подставим ряд (4) в уравнение Лапласа и краевое условие Неймана, формально (т.е. к каждому члену ряда) применив оператор Лапласа и оператор нормальной производной на окружности:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\rho^2 u_k'' + \rho u_k' - (6k)^2 u_k\right) \sin(6k\theta) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(1)\sin(6k\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(6k\theta). \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты Фурье из правых частей равенств к соответствующим коэффициентам Фурье из левых частей, получаем уравнения и краевые условия задачек для $u_k$.

Также мы должны позаботиться о том, чтобы отыскиваемое решение не имело особенности в центре круга, т.е. когда $\rho \to +0$. Можно апеллировать к теореме об устранимой

особенности, но мы поступим проще, потребовав от коэффициентов Фурье ограниченности при $\rho \to +0$. Отсюда краевые задачки для коэффициентов $u_k$ имеют вид:

$$\begin{cases} \rho^2 u_k'' + \rho u_k' - (6k)^2 u_k = 0, 0 < \rho < 1, \\ u_k(\rho) = O(1) \text{ при } \rho \to +0, \\ u_k'(1) = \varphi_k, \end{cases} \qquad (5)$$

**4) Решим краевые задачки и найдём коэффициенты Фурье.**

$Z(\rho) = \rho^s$

$s^2 - (6k)^2 = 0$

Общее решение уравнения Эйлера

$$\rho^2 Z'' + \rho Z' - (6k)^2 Z = 0$$

имеет вид $Z_k(\rho) = C_k \rho^{-6k} + D_k \rho^{6k}$ для $k \in \mathbb{N}$. Из асимптотического условия задачки (5) немедленно следует, что $C_k = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$. Тогда $Z_k(\rho) = D_k \rho^{6k}$, $Z_k'(\rho) = 6k D_k \rho^{6k-1}$. Тогда подстановка в краевое условие задачи (5) даёт $6k D_k = \varphi_k$, откуда $D_k = \dfrac{\varphi_k}{6k}$. Таким образом,

$$u_k(\rho) = \frac{\varphi_k}{6k} \rho^{6k}. \qquad (6)$$

**5) Получим формулу интегрального представления решения краевой задачи и просуммируем ядро.**

Подставим формулы (6) для коэффициентов Фурье в ряд (4):

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{6k} \rho^{6k} \sin(6k\theta).$$

Далее подставим в последнюю формулу (3) для коэффициентов Фурье разложения граничной функции, после чего изменим порядок интегрирования и (бесконечного) суммирования:

$$u(\rho,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{6\pi k}\rho^{6k}\sin(6k\theta)\int_0^{\frac{\pi}{6}}\varphi(\tau)\sin(6k\tau)d\tau=\int_0^{\frac{\pi}{6}}K(\rho,\theta,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

где

$$K(\rho,\theta,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k}\rho^{6k}\sin(6k\theta)\sin(6k\tau)\ —$$

ядро интегральной формулы. Мне не удалось просуммировать этот ряд в MAPLE ⇒ суммирую самостоятельно.

- $\sin(6k\theta)\sin(6k\tau)=\frac{1}{2}\left(\cos 6k(\theta-\tau)-\cos 6k(\theta+\tau)\right)\Rightarrow$

  $$K_1(\rho,\theta,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\rho^{6k}\cos\left(6k(\theta-\tau)\right),$$

  $$K_2(\rho,\theta,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\rho^{6k}\cos\left(6k(\theta+\tau)\right);\ K=K_1-K_2.$$

- Просуммируем ряд $K_0(\rho,\theta,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\rho^{6k}\cos\left(6k\alpha\right)=$

  $$=\Re\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}e^{k\left(6i\alpha+\ln\rho^6\right)}=\Re\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}q^k,\ \text{где}$$

  $$q=e^{\ln\rho^6+6i\alpha}=\rho^6e^{6i\alpha}=\rho^6\cos 6\alpha+i\rho^6\sin 6\alpha.$$

- Продифференцируем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}q^k$ по $q$:

  $$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}q^k\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}q^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}q^k=\frac{1}{\pi(1-q)}.\ \text{Но тогда}$$

  $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}q^k=\int_0^q\frac{d\tilde{q}}{\pi(1-\tilde{q})}=-\frac{1}{\pi}\ln(1-\tilde{q})\Big|_0^q=-\frac{1}{\pi}\ln(1-q).$$

- Итак, $K_0(\rho,\theta,\tau)=\Re\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}q^k=-\frac{1}{\pi}\Re\ln(1-q)=$
$=-\frac{1}{\pi}\ln|1-q|=-\frac{1}{\pi}\ln\sqrt{\left(1-\rho^6\cos 6\alpha\right)^2+\rho^{12}\sin^2 6\alpha}=$
$=-\frac{1}{2\pi}\ln\left(1-2\rho^6\cos 6\alpha+\rho^{12}\right)$. Проверим корректность суммирования в MAPLE, сравнив конечное выражение для $K_0$ с частичной суммой ряда.

$K0 := sum\left(\frac{1}{\mathrm{Pi}\cdot k}\cdot\rho^{6\cdot k}\cdot\cos(6\cdot k\cdot\mathrm{alpha}),\ k=1..\mathrm{infinity}\right);$

$$K0 := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{6k}\cos(6k\alpha)}{\pi k}$$

Рассмотрим следующую частичную сумму приведённого выше ряда:

$K0approx := sum\left(\frac{1}{\mathrm{Pi}\cdot k}\cdot\rho^{6\cdot k}\cdot\cos(6\cdot k\cdot\mathrm{alpha}),\ k=1..100\right):$

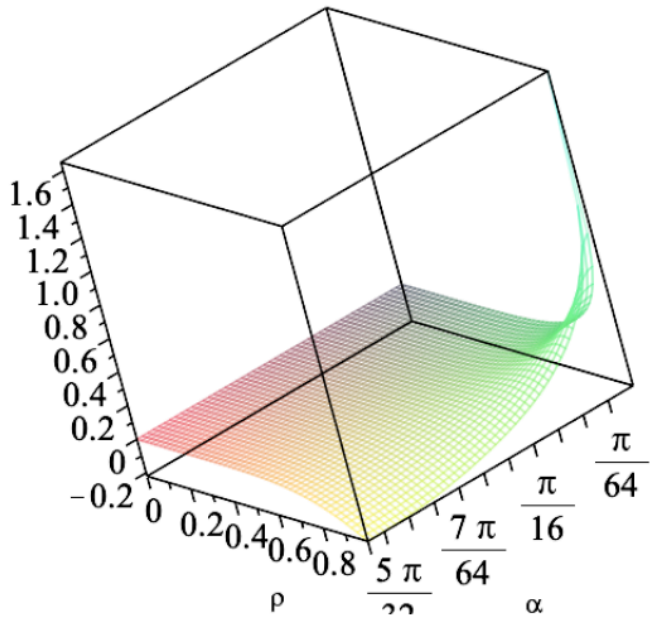
Рассмотрим конечную формулу для интегрального ядра, полученную самостоятельным суммированием:

$K0fin := -\frac{1}{2\cdot\mathrm{Pi}}\cdot\log\left(1-2\cdot\rho^6\cdot\cos(6\cdot\mathrm{alpha})+\rho^{12}\right);$

$$K0fin := -\frac{\ln\left(1-2\rho^6\cos(6\alpha)+\rho^{12}\right)}{2\pi}$$

Сравим графики частичной суммы и точной функции:

$plot3d\left([K0approx, K0fin],\ \mathrm{alpha}=0..\frac{\mathrm{Pi}}{6},\ \mathrm{rho}=0..1\right);$




Результат: графики неотличимы.

- Но тогда $K(\rho,\theta,\tau) = K_1(\rho,\theta,\tau) - K_2(\rho,\theta,\tau) =$
$$= -\frac{1}{2\pi}\ln\left(1 - 2\rho^6\cos 6(\theta-\tau) + \rho^{12}\right) + \frac{1}{2\pi}\ln\left(1 - 2\rho^6\cos 6(\theta+\tau) + \rho^{12}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1 - 2\rho^6\cos 6(\theta+\tau) + \rho^{12}}{1 - 2\rho^6\cos 6(\theta-\tau) + \rho^{12}}.$$

**6) Найдём коэффициенты Фурье для указанной правой части уравнения/краевого условия, представим решение в виде ряда, визуализируем приближение Фурье достаточной глубины.**

Найдём коэффициенты Фурье функции $\varphi(\theta) = 1$. Имеем

$$\varphi_k = \frac{12}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(6k\tau)d\tau = -\frac{12}{6\pi k}\cos(6k\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{2}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{2}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right),$$

поэтому при чётных $k$ имеем $\varphi_k = 0$, а при нечётных $k$ — $\varphi_k = \frac{4}{\pi k}$. Таким образом, ряд Фурье для решения краевой задачи имеет вид

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6k}\frac{2}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)\rho^{6k}\sin(6k\theta) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{3\pi(2j+1)^2}\rho^{12j+6}\sin\left((12j+6)\theta\right).$$

Визулизируем приближения Фурье в MAPLE, попробовав частичные суммы разной глубины.

Визуализируем частичную сумму ряда Фурье для решения краевой задачи. Сам ряд Фурье имеет вид

$$u := sum\left(\frac{2}{3\cdot Pi\cdot(2\cdot j+1)^2}\cdot\rho^{12\cdot j+6}\cdot\sin((12\cdot j+6)\cdot theta), j = 0..infinity\right);$$

$$u := \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2\,\rho^{12j+6}\sin((12j+6)\,\theta)}{3\,\pi\,(2j+1)^2}$$

Первым делом рассмотрим частичную сумму небольшой глубины.

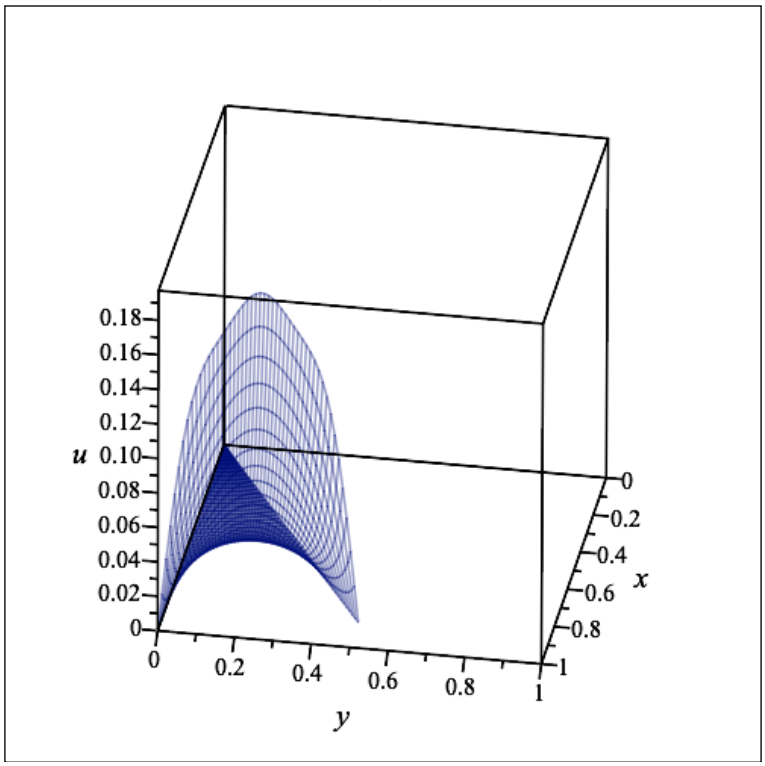
$$N1 := 3;\ uN1 := sum\left(\frac{2}{3\cdot Pi\cdot(2\cdot j+1)^2}\cdot\rho^{12\cdot j+6}\cdot\sin((12\cdot j+6)\cdot theta), j=0..N1-1\right);$$

$$N1 := 3$$

$$uN1 := \frac{2\,\rho^{6}\sin(6\,\theta)}{3\,\pi} + \frac{2\,\rho^{18}\sin(18\,\theta)}{27\,\pi} + \frac{2\,\rho^{30}\sin(30\,\theta)}{75\,\pi}$$

Построим её график (обратите внимание на координаты).

$$plot3d\left([rho\cdot\cos(theta), rho\cdot\sin(theta), uN1], theta=0..\frac{Pi}{6}, rho=0..1, size=[default, square], orientation=[13, 64, 3]\right);$$




Краевые условия Дирихле на радиусах соблюдены, но вот на дуге что-то не очень хорошее (осцилляции).

Рассмотрим частичную сумму более значительной глубины.

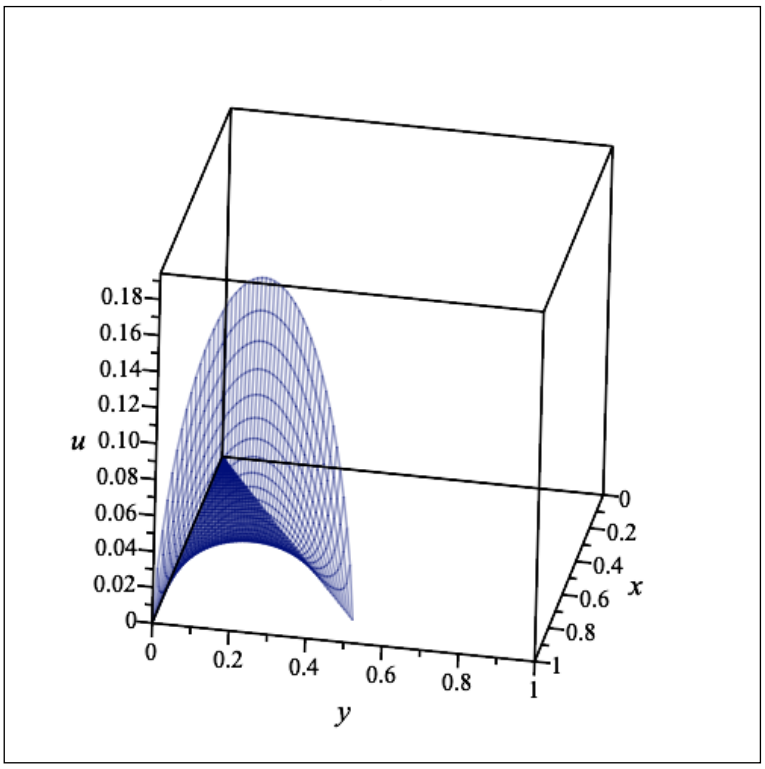
$$N2 := 30;\ uN2 := sum\left(\frac{2}{3\cdot Pi\cdot(2\cdot j+1)^2}\cdot\rho^{12\cdot j+6}\cdot\sin((12\cdot j+6)\cdot theta), j=0..N2-1\right);$$

$$N2 := 30$$

$$uN2 := \frac{2\,\rho^{42}\sin(42\,\theta)}{147\,\pi} + \frac{2\,\rho^{30}\sin(30\,\theta)}{75\,\pi} + \frac{2\,\rho^{90}\sin(90\,\theta)}{675\,\pi} + \frac{2\,\rho^{66}\sin(66\,\theta)}{363\,\pi}$$
$$+ \frac{2\,\rho^{18}\sin(18\,\theta)}{27\,\pi} + \frac{2\,\rho^{54}\sin(54\,\theta)}{243\,\pi} + \frac{2\,\rho^{354}\sin(354\,\theta)}{10443\,\pi} + \frac{2\,\rho^{294}\sin(294\,\theta)}{7203\,\pi}$$
$$+ \frac{2\,\rho^{306}\sin(306\,\theta)}{7803\,\pi} + \frac{2\,\rho^{318}\sin(318\,\theta)}{8427\,\pi} + \frac{2\,\rho^{330}\sin(330\,\theta)}{9075\,\pi} + \frac{2\,\rho^{342}\sin(342\,\theta)}{9747\,\pi}$$
$$+ \frac{2\,\rho^{210}\sin(210\,\theta)}{3675\,\pi} + \frac{2\,\rho^{222}\sin(222\,\theta)}{4107\,\pi} + \frac{2\,\rho^{234}\sin(234\,\theta)}{4563\,\pi} + \frac{2\,\rho^{246}\sin(246\,\theta)}{5043\,\pi}$$

$$+\frac{2\rho^{258}\sin(258\theta)}{5547\pi}+\frac{2\rho^{270}\sin(270\theta)}{6075\pi}+\frac{2\rho^{282}\sin(282\theta)}{6627\pi}+\frac{2\rho^{126}\sin(126\theta)}{1323\pi}$$
$$+\frac{2\rho^{138}\sin(138\theta)}{1587\pi}+\frac{2\rho^{150}\sin(150\theta)}{1875\pi}+\frac{2\rho^{162}\sin(162\theta)}{2187\pi}+\frac{2\rho^{174}\sin(174\theta)}{2523\pi}$$
$$+\frac{2\rho^{186}\sin(186\theta)}{2883\pi}+\frac{2\rho^{198}\sin(198\theta)}{3267\pi}+\frac{2\rho^{6}\sin(6\theta)}{3\pi}+\frac{2\rho^{102}\sin(102\theta)}{867\pi}$$
$$+\frac{2\rho^{78}\sin(78\theta)}{507\pi}+\frac{2\rho^{114}\sin(114\theta)}{1083\pi}$$

$$plot3d\left([\mathrm{rho}\cdot\cos(\mathrm{theta}),\mathrm{rho}\cdot\sin(\mathrm{theta}),uN2],\mathrm{theta}=0..\frac{\mathrm{Pi}}{6},\mathrm{rho}=0..1,size=[default,square],\right.$$
$$\left.orientation=[13,64,3]\right);$$




Ситуация на дуге значительно улучшилась, осцилляции исчезли.