Листок #2: лекционные задачки по теме 1–2 «Оператор Лапласа»

Задачка 2.1. Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^3$ и $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2 dx}{(1+|x|)^3} < \infty$. Верно ли, что u есть константа в $\mathbb{R}^3$? Ответ обосновать.

Задачка 2.2. Пусть $\Omega = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\right\}$. Докажите, что тривиальное решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=1} = 0, \end{cases}$$

которое удовлетворяет дополнительному условию $u(x,y) \to 0$ при $|y| \to \infty$ (для каждого фиксированного $x \in (0,1)$), единственно.

Задачка 2.3. Пусть $\Omega = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y \in \mathbb{R}\right\}$. Докажите, что тривиальное решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

не единственно.

Задачка 2.4. Пусть $\Omega = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y > 0\right\}$ — полуполоса, функция $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0, \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

причём $u(x,y) \to 0$ при $y \to +\infty$ равномерно по $x \in [0,1]$. Докажите оценку: существует константа $C > 0$, зависящая только от φ, такая, что $|u(x,y)| \leqslant Ce^{-3.14y}$ для всех $(x,y)^\top \in \Omega$.

Задачка 2.5. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash B$. Единственно ли тривиальное решение $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial B} = 0 \end{cases}$$

при дополнительном условии $\int\limits_{|x-\xi|<1} |u(\xi)|^2 d\xi = O(1)$, $|x| \to \infty$? Ответ обосновать.

Задачка 2.6. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash B$. Единственно ли тривиальное решение $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial B} = 0 \end{cases}$$

при дополнительном условии $\int\limits_{|x-\xi|<1} |u(\xi)|^2 d\xi = o(1)$, $|x| \to \infty$? Ответ обосновать.

Задачка 2.7. Постройте функцию Грина задачи Дирихле в шаровом слое

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < 2\}.$$

Задачка 2.8. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, $q \in C\left(\overline{\Omega}\right)$,

$$\Delta u + q(x)u = 0,\ x \in \Omega.$$

Рассмотрим $M = \sup\limits_{x\in\Omega} u(x)$, $m = \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$. Возможно ли, что $M > m$, при каком-либо коэффициенте q? Ответ обосновать.

Задачка 2.9. Пусть $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ — квадрат, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $\Delta u = 0$ в $\overline{\Omega}$ и $u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0$. Может ли график функции $f(x) = \int\limits_0^1 u(x,y)^2 dy$ иметь точку перегиба внутри интервала $(0,1)$? Ответ обосновать.

Задачка 2.10. Функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ называется *слабо субгармонической* в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если $\int\limits_\Omega u\Delta\varphi dx \geqslant 0$ для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Докажите, что слабо субгармоническая функция, принадлежащая пространству $C(\Omega)$, является субгармонической в обычном смысле.