Листок #1: лекционные задачки по теме 1–2 «Оператор Лапласа»

Задачка 1.1. Докажите, что функция Грина (функция-корректор) внутренней задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

имеет свойство симметрии: для любых $x^0, x^1 \in \Omega$, $x^0 \neq x^1$, $G(x^0, x^1) = G(x^1, x^0)$. Получите отсюда, что функцию Грина (функцию-корректор) можно рассматривать и при $x^0 \in \partial\Omega$, хотя изначально в определении точка x^0 должна быть строго внутри области.

Задачка 1.2. Докажите теорему Лиувилля для гармонических функций в следующей форме. Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n$, существует константа $C \geqslant 0$, которая сверху ограничивает u: для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо $u(x) \leqslant C$. Тогда u — постоянная функция.

Задачка 1.3. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^2$ — линейно связная замкнутая гиперповерхность, функция $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ удовлетворяет задаче Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = \psi. \end{cases}$$

Докажите, что функция ψ обращается в нуль не менее, чем в двух точках на $\partial\Omega$.

Задачка 1.4. Пусть функция $u \in C_0^2(B)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = f$ в шаре $B = B_R(x^0)$, $f \in C_0\left(\overline{B}\right)$. Покажите, что $\|u\| \leqslant \frac{R^2}{2n}\|f\|$, $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\| \leqslant R\|f\|$, $j = 1, \ldots, n$, где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $C\left(\overline{B}\right)$.

Задачка 1.5. Найдите все гармонические функции в $\mathbb{R}^2$, которые в любой точке $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяют неравенству $u_x(x, y) \leqslant u_y(x, y)$.

Задачка 1.6. Докажите, что телесный угол, опирающийся на заданный замкнутый плоский контур (кривую Жордана) в трёхмерном евклидовом пространстве, есть гармоническая вне контура функция вершины угла.

Задачка 1.7. Существует ли u — положительная, гармоническая в трёхмерном шаре $B_1(0)$ функция, такая, что $u(0, 0, 0) = 1$ и $u(0, 0, 0.5) = 10$? Ответ обосновать.

Задачка 1.8. Справедлив ли принцип максимума для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + u_x + u = 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, аналогичный принципу максимума для уравнения Лапласа? Ответ обосновать.

Задачка 1.9. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^1$. Может ли решение внутренней задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta u - u = 1 \text{ в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

быть строго положительным? Ответ обосновать.

Задачка 1.10. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $B_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1,\ x_n > 0\}$, $B_- = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1,\ x_n < 0\}$, $u \in C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$, $\Delta u = 0$ в B, $u(0) = 0$. Найдите связь между числами

$$\int\limits_{B_+} u(x)dx \text{ и } \int\limits_{B_-} u(x)dx.$$

Задачка 1.11. Пусть $\Delta u = f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Покажите, что преобразование Кельвина функции u, заданное равенством $v(y) = |y|^{2-n} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$, удовлетворяет уравнению $\Delta_y v = |y|^{n-2} f\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$ при $\frac{y}{|y|^2} \in \Omega$.

Задачка 1.12. Пусть $\Omega_1 \Subset \Omega_2$, $u_j \in C^2(\Omega_j) \cap C\left(\overline{\Omega}_j\right)$,

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 \text{ в } \Omega_j, \\ u_j|_{\partial\Omega_j} = \varphi_j, \end{cases}$$

$j = 1, 2$, причём $\varphi_1(x^1) < \varphi_2(x^2)$ для всех $x^1 \in \partial\Omega_1$, $x^2 \in \partial\Omega_2$. Что больше: $u_1(x^0)$ или $u_2(x^0)$, где x^0 — произвольная точка области Ω_1? Ответ обосновать.

Задачка 1.13. Пусть $H = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$ — верхняя полуплоскость, функция $u \in C^2(H) \cap C\left(\overline{H}\right)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ (x, y)^\top \in H, \\ u|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

и ограничена в H. Докажите, что $u(x, y) \equiv 0$ в H.

Задачка 1.14. Пусть $D_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$, $C_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R\}$, $\Delta u = 1$ в $D_2 \backslash \overline{D}_1$, ρ, θ — полярные координаты. Что больше: $\int_{C_1} u_\rho ds$ или $\int_{C_2} u_\rho ds$? Ответ обосновать.

Задачка 1.15. Функция $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, называется *субгармонической* в Ω, если $\Delta u \geqslant 0$ в Ω. Докажите, что при $n = 2$ субгармоническая функция удовлетворяет теореме Лиувилля в следующей форме: субгармоническая в $\mathbb{R}^2$ ограниченная сверху функция постоянна.

Задачка 1.16. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{B}_R$, где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$, $u_k \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ — гармонические функции в Ω, $k = 1, 2$, и $u_1(x) < u_2(x)$ для любой $x \in \partial\Omega$. Следует ли отсюда, что $u_1(x) < u_2(x)$ для любой $x \in \Omega$? Ответ обосновать.

Задачка 1.17. Пусть $\Omega = \left\{0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right\}$ — круговой сектор, ρ, θ — полярные координаты, $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ — гармоническая функция в Ω, $u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0$. Докажите, что существует такая константа $C > 0$, что для всех $\rho \in (0, 1)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ справедлива оценка $|u(\rho, \theta)| \leqslant C\rho^6$.

Задачка 1.18. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Докажите, что если $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $\Delta u = 0$ в Ω и $u = \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = 0$ на некоторым куске границы, открытом в топологии $\partial\Omega$ ($\vec{\nu}$ — единичная внешняя нормаль), то функция u тождественно равна нулю в Ω.

Задачка 1.19. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $u = 0$ на $\partial\Omega$. Докажите следующее неравенство: для любого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int\limits_\Omega u^2 dx.$$

Задачка 1.20. Пусть $\Omega = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + 2y^2 < 2\right\}$, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{x^2+2y^2=2} = x + y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + (1 - x)u\Big|_{x^2+2y^2=1} = 0. \end{cases}$$

Найдите $\max\limits_{(x,y)^\top \in \Omega} |u(x, y)|$.

Задачка 1.21. Найдите все гармонические функции в $\mathbb{R}^n$, принадлежащие $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Задачка 1.22. Пусть функция $u \in C^2(\Omega)$ (Ω — область в $\mathbb{R}^n$) удовлетворяет уравнению $\Delta u + \lambda u = 0$, где $\lambda = \text{const}$. Докажите, что функция u аналитическая в Ω.