Разделение переменных в полярных и сферических координатах

Задача 1.1. Найти все собственные значения и собственные функции спектральной задачи в стандартном диске

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ в } \mathbb{D}, \\ u\big|_{\partial\mathbb{D}} = 0, \end{cases}$$

выполнив разделение переменных в полярных координатах, предполагая, что каждая собственная функция имеет вид $u(\rho,\theta) = Z(\rho)Y(\theta)$ (ρ, θ — полярные координаты).

Задача 1.2. Найти функцию $u = u(\rho,\theta,\upsilon)$ (ρ — сферический радиус, θ — широта, υ — долгота), гармоническую внутри сферы радиуса R с центром в начале координат, удовлетворяющую краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + u\bigg|_{\rho=R} = \sin\theta\left(\sin\upsilon + \cos\upsilon\cos\theta + \sin\theta\right).$$

Задача 1.3. Найти функцию $u = u(\rho,\theta,\upsilon)$ (ρ — сферический радиус, θ — широта, υ — долгота), гармоническую внутри шарового слоя $1 < \rho < 2$, такую, что

$$u\big|_{\rho=1} = \sin\theta\sin\upsilon(5+6\cos\theta),\ u_\rho\Big|_{\rho=2} = 12\sin 2\theta\sin\upsilon.$$

Задача 1.4. Найти все собственные значения и собственные функции противоположного оператора Лапласа-Бельтрами на полусфере $M = \{x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0\}$ с граничным условием Дирихле, т.е. решить спектральную задачу

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ в } M, \\ u\big|_{\partial M} = 0, \end{cases}$$

выполнив разделение переменных в сферических координатах, предполагая, что каждая собственная функция имеет вид $u(\theta,\upsilon) = V(\theta)W(\upsilon)$ (θ — широта, υ — долгота).

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Чтобы получить зачёт за первое общее дом. задание, необходимо правильно решить любые **три задачи** из предложенных четырёх. Дедлайн для всех групп — **25.04.26, 23:59**.

Ресурсы для решения общего дом. задания #1

1. Материалы к практическим занятиям по теме #3 «Разделение переменных в декартовых, полярных и сферических координатах».

2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.
3. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.