

Гипотеза об усреднении blow-up дифференциальных уравнений и гипотеза Пенлеве

Александр Байков

Дисконтинуум $S1 \bullet E1$

19 апреля 2026 г.

Дисконтинуум: некоторые темы первого сезона

- Тема #1 «Усреднение blow-up дифференциальных уравнений и гипотеза Пенлеве» (с апреля 2026 г.).
- Тема #2 «КАМ-теория обратимых систем» (с мая 2026 г.).
- Тема #3 «Blow-up усреднённых $3D$ уравнений Навье–Стокса» (с июля 2026 г.).
- Тема #4 «Теория обобщённых функций» (с августа 2026 г.).

Системы в стандартной форме Крылова–Боголюбова

Система дифференциальных уравнений в стандартной форме Крылова—Боголюбова:

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t). \quad (1)$$

Здесь $X : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X(x, t + 2\pi) \equiv X(x, t)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — область.

Временное среднее (среднее) периодической функции имеет вид

$\bar{X}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(u, t) dt$. Наряду с системой (1) рассмотрим

усреднённую систему

$$\dot{u} = \varepsilon \overline{X}(u). \quad (2)$$

В методе усреднения вместо системы (1) исследуется более простая система (2). Решение системы (2) с начальным условием $u(0) = x^0$ приближенно описывает решение системы (1) с тем же начальным условием $x(0) = x^0$ (см. далее).

Blow-up системы дифференциальных уравнений

Определение 1

Blow-up (взрывным решением) системы (1) (системы (2)) называется частное решение $x = x(t)$ ($u = u(t)$) с начальным условием $x(0) = x^0$ ($u(0) = u^0$), существующее на промежутке $[0, T^*)$, $0 < T^* < \infty$, не допускающее продолжение для $t > T^*$.

Величина T^* называется *временем blow-up*, а начальные условия для взрывных решений образуют *множество blow-up*. Две причины почему решение нельзя продолжить:

- существует последовательность $t_k \rightarrow T^* - 0$, что $x(t_k) \rightarrow x^* \in \partial D$ при $k \rightarrow \infty$;
- существует последовательность $t_k \rightarrow T^* - 0$, что $|x(t_k)| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

В этой работе нас интересует второй случай.

Гипотеза об усреднении blow-up

Пусть известно одно взрывное решение или семейство blow-up усреднённой системы (2). Существует ли тогда blow-up точной системы (1), и если существуют, то как они связаны с blow-up усреднённой системы? Пока (для простоты) будем предполагать, что $D = \mathbb{R}^n$.

Гипотеза об усреднении blow-up

Пусть правая часть системы (1) $X \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $X(x, t + 2\pi) \equiv X(x, t)$ и удовлетворяет *локальному условию Липшица* по переменным x : для любого компакта $K \Subset \mathbb{R}^n$ существует $L > 0$, что для всех $x, x' \in K$, $t \in \mathbb{R}$ $|X(x, t) - X(x', t)| \leq L|x - x'|$. Если система (2) имеет blow-up с начальным условием $u(0) = u^0$ при $t \rightarrow T^* - 0$, то и решение системы (1) с начальным условием $x(0) = u^0$ взрывается при достаточно малых $\varepsilon > 0$, если $t \rightarrow T - 0$, причём $T = T^* + O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Что делать с этой гипотезой?

Мы докажем гипотезу об усреднении blow-up и дадим конструктивную оценку времени blow-up точных уравнений. Утверждение, обратное к гипотезе, очевидно, неверно: например, уравнение $\dot{x} = \varepsilon x^2 \sin t$ имеет blow-up с начальным условием $x(0) = x_0 \in [\frac{1}{2\varepsilon}, +\infty)$ и временем $T = \arccos\left(1 - \frac{1}{\varepsilon x_0}\right)$, но все решения усреднённого уравнения $\dot{u} = 0$ стационарны. План (примерно) следующий:

- 1 проверка гипотезы для простого примера;
- 2 приложение усреднения blow-up — гипотеза Пенлеве об особых решениях задачи n тел ($n = 5, n = 4$);
- 3 доказательство гипотезы об усреднении blow-up и обобщения;
- 4 построение особых решений Пенлеве в задаче n тел ($n = 5, n = 4$).

Уравнение Бернулли

Проверим гипотезу об усреднении blow-up для одного простого примера — уравнения Бернулли. Хорошо известно, что оно интегрируется в квадратурах, поэтому вопрос о существовании blow-up уравнения Бернулли эквивалентен исследованию некоторого неявного уравнения. План исследования:

- 1 проинтегрировать уравнение Бернулли, исследовать неявное уравнение $F(t; x^0, \varepsilon) = 0$, определяющее время blow-up;
- 2 минимальный положительный корень последнего уравнения есть время blow-up с начальным условием $x(0) = x^0$ (если уравнение не имеет вещественных корней, то решение продолжается до $+\infty$);
- 3 исследовать blow-up усреднённого уравнения Бернулли и сравнить его с blow-up точного уравнения.

Точные результаты о blow-up уравнения Бернулли

Итак, рассмотрим уравнение Бернулли с 2π -периодическими коэффициентами a, b :

$$\dot{x} = \varepsilon (a(t)x + b(t)x^2). \quad (3)$$

Введём обозначения $A(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$, $B(t, \varepsilon) = \int_0^t b(\tau) e^{\varepsilon A(\tau)} d\tau$, тогда решение уравнения (3) с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет вид

$$x = \frac{x_0 e^{\varepsilon A(t)}}{1 - \varepsilon x_0 B(t, \varepsilon)}. \quad (4)$$

Решение взрывается, если уравнение

$$x_0^{-1} - \varepsilon B(t, \varepsilon) = 0 \quad (5)$$

имеет положительный корень относительно t ; наименьший из таких корней — время blow-up.

Точные результаты о blow-up уравнения Бернулли

Исследуем функцию $t \mapsto \varepsilon B(t, \varepsilon)$ на экстремумы.

- Критические точки функции $B = B(t, \varepsilon)$ — это нули коэффициента $b(t)$.
- Очевидно, что $A(t + 2\pi) = A(t) + A(2\pi)$,
 $B(t + 2\pi, \varepsilon) = e^{\varepsilon A(2\pi)} B(t, \varepsilon) + B(2\pi, \varepsilon)$.
- Поэтому, если $B(t^*, \varepsilon)$ — локальный экстремум функции B при фиксированном ε , t^* — точка экстремума, то
 $B(t^* + 2\pi, \varepsilon) = e^{\varepsilon A(2\pi)} B(t^*, \varepsilon) + B(2\pi, \varepsilon)$ — тоже локальный экстремум.

Пусть $m_0 = m_0(\varepsilon)$ и $M_0 = M_0(\varepsilon)$ — минимальное и максимальное значения функции B на $[0, 2\pi]$. Введём обозначения $\alpha = e^{\varepsilon A(2\pi)}$, $\beta = B(2\pi, \varepsilon)$, и пусть $m_k = \min_{[2\pi k, 2\pi(k+1)]} B$, $M_k = \max_{[2\pi k, 2\pi(k+1)]} B$, тогда

$$m_k = \alpha m_{k-1} + \beta, \quad M_k = \alpha M_{k-1} + \beta, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Анализ множества начальных значений blow-up

Если $\alpha \neq 1$, т.е. $A(2\pi) \neq 0$, то решение уравнения (6) имеет вид $m_k = \alpha^k m_0 + \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} \beta$ (и аналогично для M_k). При $\alpha = 1$ имеем $m_k = m_0 + k\beta$. Уравнение (5) имеет корень на $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$ тогда и только тогда, когда $x_0^{-1} \in [\varepsilon m_k, \varepsilon M_k]$. Следовательно, уравнение (3) имеет blow-up тогда, когда $x_0^{-1} \in (\varepsilon \inf_{k \geq 0} m_k, \varepsilon \sup_{k \geq 0} M_k)$. Результаты вычисления множества blow-up приведены в таблице.

	$\alpha > 1$	$0 < \alpha < 1$
$M_0 + \frac{\beta}{\alpha-1} < 0$	$x_0^{-1} \in (-\infty, \varepsilon M_0)$	$x_0^{-1} \in \left(\varepsilon m_0, -\frac{\varepsilon \beta}{\alpha-1}\right)$
$M_0 + \frac{\beta}{\alpha-1} > 0,$ $m_0 + \frac{\beta}{\alpha-1} < 0$	$x_0^{-1} \in (-\infty, +\infty)$	$x_0^{-1} \in (\varepsilon m_0, \varepsilon M_0)$
$m_0 + \frac{\beta}{\alpha-1} > 0$	$x_0^{-1} \in (\varepsilon m_0, +\infty)$	$x_0^{-1} \in \left(-\frac{\varepsilon \beta}{\alpha-1}, \varepsilon M_0\right)$

Усреднение уравнения Бернулли

При $\alpha = 1$ всё зависит от параметра β : если $\beta \geq 0$, то множество blow-up есть $x_0^{-1} \in (\varepsilon m_0, +\infty)$, а для $\beta < 0$ оно имеет вид $x_0^{-1} \in (-\infty, \varepsilon M_0)$. Теперь усредним уравнение Бернулли (3):

$$\dot{u} = \varepsilon (\bar{a}u + \bar{b}u^2). \quad (7)$$

Здесь $\bar{a} = \frac{1}{2\pi} A(2\pi)$, $\bar{b} = \frac{1}{2\pi} B(2\pi, 0)$. Если $\bar{a} \neq 0$, то решение уравнения (7) с начальным условием $u(0) = u_0$ суть функция $u(t) = \frac{u_0 \bar{a} e^{\varepsilon \bar{a} t}}{\bar{a} + u_0 \bar{b} (1 - e^{\varepsilon \bar{a} t})}$; при $\bar{a} = 0$ решение имеет вид $u(t) = \frac{u_0}{1 - \varepsilon u_0 \bar{b} t}$. Если $\bar{b} = 0$, то усреднённое уравнение линейно и взрывных решений нет. Пусть $\bar{b} \neq 0$, тогда формула для времени blow-up имеет вид

$$T^* = \frac{1}{\varepsilon \bar{a}} \ln \left(1 + \frac{\bar{a}}{u_0 \bar{b}} \right). \quad (8)$$

Сравнение blow-up точного и усреднённого уравнений

Легко видеть, что решение взрывается, если выполнено условие

$$u_0 \bar{b} > \max(0, -\bar{a}). \quad (9)$$

При $\bar{a} = 0$ имеем $T^* = \frac{1}{\varepsilon u_0 \bar{b}}$; blow-up существует, если $u_0 \bar{b} > 0$. Сравним формулу (8) и условие (9) с результатами исследования blow-up точного уравнения (3).

Предположим, что $A(2\pi) = 2\pi\bar{a} \neq 0$, выполнены условия существования blow-up, и уравнение (5) имеет минимальный положительный корень T . Обозначим через N максимальное число периодов на промежутке $[0, T]$, т.е. $N = \lfloor \frac{1}{2\pi} T \rfloor$, $T = 2\pi N + \tau$ (N зависит от x_0 и ε). Перепишем уравнение (5) в виде

$$x_0^{-1} - \varepsilon e^{\varepsilon A(2\pi)N} \left(B(\tau, \varepsilon) + \frac{B(2\pi, \varepsilon)}{e^{\varepsilon A(2\pi)} - 1} \right) + \frac{\varepsilon B(2\pi, \varepsilon)}{e^{\varepsilon A(2\pi)} - 1} = 0. \quad (10)$$

Сравнение blow-up точного и усреднённого уравнений

Левая часть уравнения (10) представляется собой ряд неотрицательных степеней ε , когда степенное разложение N начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$. Пусть $N = \frac{\nu}{\varepsilon} + \dots$, тогда

$$x_0^{-1} - e^{A(2\pi)\nu} \frac{B(2\pi, 0)}{A(2\pi)} + \frac{B(2\pi, 0)}{A(2\pi)} = 0.$$

Отсюда $\nu = \frac{1}{A(2\pi)} \ln \left(1 + \frac{A(2\pi)}{x_0 B(2\pi, 0)} \right) = \frac{1}{2\pi \bar{a}} \ln \left(1 + \frac{\bar{a}}{x_0 \bar{b}} \right)$ при $B(2\pi) \neq 0$, следовательно, $T = T^* + \dots$

Для подтверждения гипотезы нужно показать следующее: для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ и достаточно мало) минимальный корень уравнения (10) имеет вид $T = \frac{\nu}{\varepsilon} + O(1)$.

Рассмотрим один случай: $A(2\pi) > 0$ ($\alpha > 1$) и для малых неотрицательных ε выполнено неравенство $m_0(\varepsilon)(e^{\varepsilon A(2\pi)} - 1) + B(2\pi, \varepsilon) > 0$ (в частности, $B(2\pi, 0) > 0$).

Сравнение blow-up точного и усреднённого уравнений

Множество blow-up точного уравнения (3) есть $x_0^{-1} \in (\varepsilon m_0(\varepsilon), +\infty)$, тогда как множество blow-up усреднённого уравнения (6) задаётся условием $u_0 \in (0, +\infty)$. Легко видеть, что независимо от функции $m_0(\varepsilon)$ для каждого $u_0 > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ точка u_0 принадлежит множеству blow-up точного уравнения (3). Первая часть гипотезы подтверждена.

Для анализа взаимоотношений T и T^* заметим, что уравнение (5) имеет корень на промежутке $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_0^{-1} \frac{e^{\varepsilon A(2\pi)} - 1}{\varepsilon} + B(2\pi, \varepsilon)}{M_0(\varepsilon)(e^{\varepsilon A(2\pi)} - 1) + B(2\pi, \varepsilon)} \leq e^{\varepsilon A(2\pi)k} \leq \frac{x_0^{-1} \frac{e^{\varepsilon A(2\pi)} - 1}{\varepsilon} + B(2\pi, \varepsilon)}{m_0(\varepsilon)(e^{\varepsilon A(2\pi)} - 1) + B(2\pi, \varepsilon)}.$$

Отсюда явствует, что минимальный $k = \frac{1}{\varepsilon A(2\pi)} \ln \left(1 + \frac{A(2\pi)}{x_0 B(2\pi, 0)} \right) + O(1)$, следовательно, $T = T^* + O(1)$ при $x_0 = u_0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма Гронуолла–Беллмана

В произвольной ситуации невозможно предъявить неявные уравнения вида $F(t; x^0, \varepsilon) = 0$ для времени blow-up усреднённых и точных уравнений. Надо предложить другую концепцию исследования соотношений между ними.

Лемма Гронуолла–Беллмана

Пусть $\alpha, \beta \in C[0, \infty)$, непрерывная функция $u : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет для всех $t \in [0, \infty)$ неравенству

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s) u(s) ds. \text{ Тогда при } t \geq 0 \text{ верно}$$

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) \exp \left(\int_s^t \beta(\theta) d\theta \right) ds. \text{ Если, кроме того, для всех}$$

$$t \geq 0 \text{ верно неравенство } \alpha(t) \geq 0, \text{ то } u(t) \leq \alpha(t) \exp \int_0^t \beta(s) ds.$$

Теорема о точности усреднения

Теорема о точности усреднения

Пусть система (1) удовлетворяет условиям гипотезы об усреднении blow-up, $u = u(t)$ — решение усреднённой системы (2) с начальным условием $u(0) = c \in \mathbb{R}^n$. Тогда решение $x = x(t)$ системы (1), удовлетворяющее тому же начальному условию $u(0) = c$, на совместном с $u = u(t)$ промежутке существования $t \in [0, \frac{\kappa}{\varepsilon}]$ (κ не зависит от ε , но зависит от c), удовлетворяет оценке

$$|x(t) - u(t)| \leq 2\varepsilon\pi M(L\kappa + 1)e^{\kappa L}, \quad (11)$$

где $M = \max_{x \in K, 0 \leq t \leq 2\pi} |X(x, t)|$, $L = L(K)$ (константа Липшица для компакта K), а $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторый компакт, содержащий интегральные кривые $u = u(t)$, $x = x(t)$, $0 \leq t \leq \frac{\kappa}{\varepsilon}$.

Теорема о точности усреднения: доказательство

Объясним сначала, почему оба решения существуют на промежутке вида $[0, \frac{\kappa}{\varepsilon}]$, причём κ от ε не зависит. В отношении u всё просто: рассмотрим *медленное* время $\tau = \varepsilon t$. $\bar{X}$ также удовлетворяет локальному условию Липшица, поэтому задача Коши $\frac{du}{d\tau} = \bar{X}(u)$, $u(0) = c$ имеет единственное решение на промежутке $\tau \in [0, \kappa_1] \Rightarrow$ в быстром времени u существует на $[0, \frac{\kappa_1}{\varepsilon}]$.

Из теоремы Пикара (см. Э.А. Кордингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: ИЛ, 1958 г.) следует, что решение задачи Коши $\dot{x} = \varepsilon X(x, t)$, $x(0) = c$ существует на промежутке $t \in [-\alpha, \alpha]$, где $\alpha = \min \left\{ \nu, \frac{\rho}{\varepsilon \mu(C)} \right\}$, $\mu(C) = \max_{(x,t) \in C} |X(x, t)|$,

$C = \bar{B}_\rho(c) \times [-\nu, \nu]$. Обозначим $C^* = \bar{B}_\rho(c) \times [-\pi, \pi]$; очевидно, что $\mu(C) = \mu(C^*) = \mu^*$ для $\nu \geq \pi$. Фиксируем $\rho > 0$, выберем $\nu > 0$ достаточно большим, тогда $\alpha = \frac{\rho}{\varepsilon \mu^*} \Rightarrow$ решение существует при $t \in [0, \frac{\kappa_2}{\varepsilon}]$, $\kappa_2 = \frac{\rho}{\mu^*}$. Итак, можно положить $\kappa = \min \{\kappa_1, \kappa_2\}$.

Теорема о точности усреднения: доказательство

Имеем интегральное уравнение

$$x(t) - u(t) = \varepsilon \int_0^t (X(x(\theta), \theta) - \bar{X}(u(\theta))) d\theta. \quad (12)$$

Из уравнения (12) получим оценку $|x(t) - u(t)| \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \left| \int_0^t (X(x(\theta), \theta) - X(u(\theta), \theta) + X(u(\theta), \theta) - \bar{X}(u(\theta))) d\theta \right| \leq \\ &\leq \varepsilon L \int_0^t |x(\theta) - u(\theta)| d\theta + \varepsilon \left| \int_0^t (X(u(\theta), \theta) - \bar{X}(u(\theta))) d\theta \right|. \end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{X}(u, t) = X(u, t) - \bar{X}(u)$.

Теорема о точности усреднения: доказательство

Разобьём промежуток $[0, \frac{\kappa}{\varepsilon}]$ на $N = \lfloor \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon} \rfloor$ периодов и рассмотрим оценку

$$\varepsilon \left| \int_0^t \tilde{X}(u(\theta), \theta) d\theta \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \tilde{X}(u(\theta), \theta) d\theta \right| + 2\varepsilon\pi M \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \left| \tilde{X}(u(\theta), \theta) - \tilde{X}(u^k, \theta) \right| d\theta + \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \tilde{X}(u^k, \theta) d\theta \right| + 2\varepsilon\pi M,$$

где $u^k = u(2\pi k)$. Легко видеть, что $\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \tilde{X}(u^k, \theta) d\theta = 0$. Имеем

$$u(\theta) = u^k + \varepsilon \int_{2\pi k}^{\theta} \bar{X}(u(\theta')) d\theta', \text{ откуда}$$

Теорема о точности усреднения: доказательство

$$\left| u(\theta) - u^k \right| = \varepsilon \left| \int_{2\pi k}^{\theta} \bar{X}(u(\theta')) d\theta' \right| \leq \varepsilon M |\theta - 2\pi k|.$$

Заметим, что функция $\tilde{X}$ также удовлетворяет на компакте K условию Липшица с константой L . Поэтому продолжим оценку:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left| \int_0^t \tilde{X}(u(\theta), \theta) d\theta \right| &\leq \varepsilon L \sum_{k=0}^{N-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |u(\theta) - u^k| d\theta + 2\varepsilon\pi M \leq \\ &\leq \varepsilon^2 LM \sum_{k=0}^{N-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} (\theta - 2\pi k) d\theta + 2\varepsilon\pi M \leq 2\varepsilon\pi M(L\kappa + 1), \end{aligned}$$

поскольку $N \leq \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon}$.

Теорема о точности усреднения: доказательство

Итак, скалярная функция $|x(t) - u(t)|$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$|x(t) - u(t)| \leq 2\varepsilon\pi M(L\kappa + 1) + \varepsilon L \int_0^t |x(\theta) - u(\theta)| d\theta.$$

По лемме Гронуолла–Беллмана для всех $t \in [0, \frac{\kappa}{\varepsilon}]$ справедлива оценка

$$|x(t) - u(t)| \leq 2\varepsilon\pi M(L\kappa + 1) \exp \int_0^t \varepsilon L d\theta = 2\varepsilon\pi M(L\kappa + 1) e^{\kappa L}.$$

Замечание к теореме. Константы M и L зависят от ε , поэтому характер оценки (11) остаётся (без указания этих зависимостей) открытым.