# Вариационные проблемы уравнений в частных производных

I liked to imagine the objection as a Borgesian fabulation:
consider a person standing before the Book of Ages,
the chronicle that records every event, past and future.
— Ted Chiang, 'Story of Your Life'

Пусть дана вариационная проблема:

$$E(u) = (u, u)' + 2\langle l, u\rangle \to \min,\ u \in H,$$

где $H$ — (сепарабельное) гильбертово пространство, $(u, v)'$ — другое скалярное произведение в $H$ с эквивалентной нормой, $l \in H^*$, т.е. $l$ — линейный ограниченный функционал, $\langle l, u\rangle = l(u)$.

**Теорема.** Экстремаль $u_0 \in H$ функционала $E$, минимизирующая его, существует и единственна.

**Пример 4.1.** Найти функцию $v_0$, реализующую минимум функционала $E(v) = \int_0^1 \left(v'^2 + v^2\right) dx + 2\int_0^1 v dx$ в пространстве $H_0^1(0,1)$:

$$\begin{cases} \int_0^1 \left(v'^2 + v^2\right) dx + 2\int_0^1 v dx \to \min, \\ v(0) = 0, v(1) = 0. \end{cases}$$

$$E(v) = \int_0^1 \left( \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v^2 \right) dx + 2\int_0^1 v dx = (v, v)' + 2(1, v)_{L_2},$$

**Решение.** $H_0^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$,

$C^1L_2[0,1]$, $(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx$, это пространство неполное относительно нормы $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$.

- $L_2(0,1)$ — пространство Лебега квадратично интегрируемых по Лебегу функций, $(u,v)_{L_2} = \int_0^1 uvdx$. $u = v$ в $L_2(0,1) \Leftrightarrow$ $u(x) = v(x)$ для почти всех $x \in (0,1)$. Пространство Лебега полное.
- $H^1(0,1) = \left\{u \in L_2(0,1) : \exists u' \in L_2(0,1)\right\}$, где $u'$ — обобщённая (слабая) производная, если для любой $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ $\int_0^1 u'\varphi dx = -\int_0^1 u\varphi' dx$, $C^1[0,1] \subset H^1(0,1)$, $\left|\frac{1}{2} - x\right| \in H^1(0,1)$, $\frac{d}{dx}\left|\frac{1}{2} - x\right| = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - x\right)$. $H^1(0,1)$ — пространство Соболева первого порядка.
  $(u,v)_{H^1} = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx$. $H^1(0,1)$ — гильбертово пространство. Теорема вложения: $H^1(0,1) \subset C[0,1]$.
- $H^2(0,1) = \left\{u \in L_2(0,1) : \exists u', u'' \in L_2(0,1)\right\}$,
  $(u,v)_{H^2} = \int_0^1 (u''v'' + u'v' + uv)\,dx$.

где $(u,v)' = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx$ — стандартное (естественное) скалярное произведение в $H_0^1(0,1)$, $(1,v) = \int_0^1 vdx$ — скалярное произведение в $L_2(0,1)$,

$\left|2(1,v)_{L_2}\right| \leqslant 2\|1\|_{L_2}\|v\|_{L_2} \leqslant 2\|v\|_{H^1}$. Отсюда следует, что функция $v_0$, реализующая минимум функционала энергии, существует и единственна.

Пусть $v_0 \in H_0^1(0,1)$ — экстремаль функционала $E$, минимизирующая его. Рассмотрим комбинацию $v_0 + t\delta v$, где $0 \neq \delta v \in H_0^1(0,1)$ — *вариация экстремали*, $t \in \mathrm{R}$. Имеем выражение для приращения функционала энергии:
$E(v_0 + t\delta v) - E(v_0) = (v_0 + t\delta v, v_0 + t\delta v)' + 2(1, v_0 + t\delta v) - (v_0, v_0)' - 2(1, v_0) = (v_0, v_0)' + 2t(v_0, \delta v)' + t^2(\delta v, \delta v)' + 2(1, v_0) + 2t(1, \delta v) - -(v_0, v_0)' - 2(1, v_0) = t^2(\delta v, \delta v)' + 2t\,((v_0, \delta v)' + (1, \delta v)) \geqslant 0$ для любого $t \in \mathrm{R} \Rightarrow$ необходимое условие экстремали $(v_0, \delta v)' + (1, \delta v) = 0$ для любой вариации $\delta v \in H_0^1(0,1)$, т.е.

$$\int_0^1 \left(v_0'\delta v' + v_0\delta v\right) dx + \int_0^1 \delta v dx = 0.$$

Предположим, что $v_0 \in H^2(0,1)$. Тогда, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$v_0'\delta v\Big|_0^1 - \int_0^1 v_0''\delta v dx + \int_0^1 v_0\delta v dx + \int_0^1 \delta v dx = 0 \Rightarrow$$

$\int_0^1 \left(-v_0'' + v_0 + 1\right)\delta v dx = 0$ для любой $\delta v \in H_0^1(0,1)$. Но $\delta v$ можно взять из $C_0^\infty(0,1) \Rightarrow -v_0'' + v_0 + 1 = 0$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $E = E(v)$.

**Лемма Дюбуа-Реймона.** Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и для любой основной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0.$$

Тогда $u(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$.

Имеем краевую задачу вида

$$\begin{cases} v_0'' - v_0 = 1, 0 < x < 1, \\ v_0(0) = 0, v_0(1) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид $v_0(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - 1$. Подстановка в краевые условия даёт

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 - 1 = 0, A\operatorname{ch} 1 + B\operatorname{sh} 1 - 1 = 0.$$

Отсюда $A = 1, B = \dfrac{1 - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}$.

Таким образом, $v_0(x) = \operatorname{ch} x + \dfrac{1 - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh} x - 1$ — экстремаль функционала энергии $E = E(v)$, $v \in H_0^1(\Omega)$.

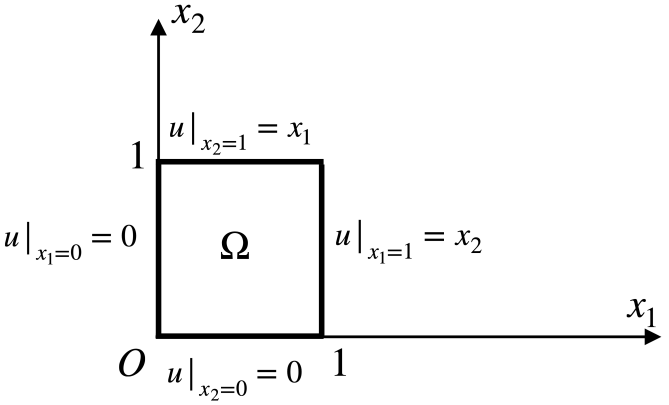
**Пример 4.2.** Доказать, что для всех функций $u \in H^1(\Omega)$, где $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, удовлетворяющих граничным условиям

$u\big|_{x_1=0} = 0,\ u\big|_{x_2=0} = 0,$

$u\big|_{x_2=0} = x_1,\ u\big|_{x_1=1} = x_2,$

справедливо неравенство

$$\iint_\Omega \left| \nabla u \right|^2 dx_1 dx_2 \geqslant \frac{2}{3}.$$




Имеет ли место равенство для каких-нибудь из этих функций?

**Решение.** Имеем вариационную проблему

$$E(u) = \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 = \iint_\Omega \left( u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 \right) dx_1 dx_2 \to \min,$$

$u \in H^1(\Omega), u\big|_{x_1=0} = 0,\ u\big|_{x_2=0} = 0,\ u\big|_{x_2=0} = x_1,\ u\big|_{x_1=1} = x_2.$

Редукция: $u = v + w$, где $w \in H^1(\Omega), w\big|_{x_1=0} = 0,\ w\big|_{x_2=0} = 0,$ $w\big|_{x_2=0} = x_1,\ w\big|_{x_1=1} = x_2$, например, $w = x_1 x_2$, $v \in H_0^1(\Omega)$.

Преобразуем функционал энергии:

$$E(u) = E(v + w) = \iint_\Omega \left( (v_{x_1} + x_2)^2 + (v_{x_2} + x_1)^2 \right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint_\Omega \left(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2\right) dx_1 dx_2 + 2\iint_\Omega \left(x_2 v_{x_1} + x_1 v_{x_2}\right) + \iint_\Omega \left(x_1^2 + x_2^2\right) dx_1 dx_2,$$

где

$$\iint_\Omega \left(x_1^2 + x_2^2\right) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2\right) dx_2 = \int_0^1 \left(x_1^2 + \frac{1}{3}\right) dx_1 = \frac{2}{3};$$

Новая вариационная проблема:

$$\tilde{E}(v) = \iint_\Omega \left(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2\right) dx_1 dx_2 + 2\iint_\Omega \left(x_2 v_{x_1} + x_1 v_{x_2}\right) dx_1 dx_2 \to \min,$$

$v \in H_0^1(\Omega)$. Введём обозначения:

- $(v, \tilde{v})' = \iint_\Omega \left(v_{x_1}\tilde{v}_{x_1} + v_{x_2}\tilde{v}_{x_2}\right) dx_1 dx_2$ — скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева;
  $(v, \tilde{v}) = \iint_\Omega \left(v_{x_1}\tilde{v}_{x_1} + v_{x_2}\tilde{v}_{x_2} + v\tilde{v}\right) dx_1 dx_2$ — стандартное скал. произведение в $H_0^1(\Omega)$.
- $\langle l, v\rangle = \iint_\Omega \left(x_2 v_{x_1} + x_1 v_{x_2}\right) dx_1 dx_2$ —линейный ограниченный функционал над $H_0^1(\Omega)$.

Тогда функционал можно записать в виде

$$\tilde{E}(v) = (v, v)' + 2\langle l, v\rangle.$$

По основной теореме этот функционал допускает единственную экстремаль, которая его минимизирует.

Получим уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$. Пусть $v \in H_0^1(\Omega)$ — экстремаль функционала энергии, минимизирующая его. Рассмотрим $\delta v \in H_0^1(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$, найдём приращение функционала:

$0 \leqslant \tilde{E}(v+t\delta v) - \tilde{E}(v) = (v+t\delta v, v+t\delta v)' + 2\langle l, v+t\delta v\rangle - (v,v)' - 2\langle l, v\rangle =$

$= t^2(\delta v, \delta v)' + 2t\left((v,\delta v)' + \langle l, \delta v\rangle\right) \Rightarrow$

$\left.\frac{d}{dt}\left(\tilde{E}(v+t\delta v) - \tilde{E}(v)\right)\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow (v,\delta v)' + \langle l, \delta v\rangle = 0$ для $\forall \delta v \in H_0^1(\Omega)$. Последнее равенство перепишем в интегральном виде:

$$\iint_\Omega \left(v_{x_1}\delta v_{x_1} + v_{x_2}\delta v_{x_2}\right) dx_1 dx_2 + \iint_\Omega \left(x_2\delta v_{x_1} + x_1\delta v_{x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0.$$

Предположим, что $v \in H^2(\Omega)$. Вспомним формулу многомерного интегрирования по частям:

$$\int_\Omega f_{x_j} g dx = \int_{\partial\Omega} fg\nu_j ds - \int_\Omega f g_{x_j} dx.$$

Интегрируем по частям первый интеграл:

$$-\iint_\Omega \left(v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2}\right)\delta v dx_1 dx_2 + \iint_\Omega \left(x_2\delta v_{x_1} + x_1\delta v_{x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0$$

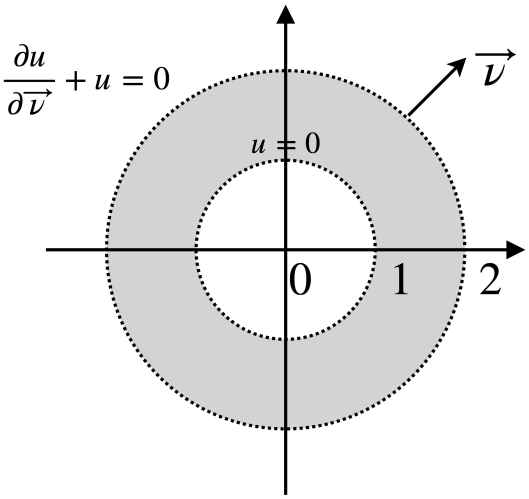
(интеграл по границе равен нулю, т.к. $\delta v\big|_{\partial\Omega} = 0$).

Интегрируем по частям второй интеграл:

$$-\iint_\Omega \left(v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2}\right)\delta v dx_1 dx_2 - \iint_\Omega \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)\delta v dx_1 dx_2 = 0$$

$\Rightarrow \iint_\Omega \left(v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2}\right)\delta v dx_1 dx_2 = 0$ для любой $\delta v \in H_0^1(\Omega)$. По лемме Дюбуа-Реймона $\Delta v = 0$, т.е. уравнение Лапласа есть уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$ над $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Из единственности решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области следует, что $v = 0$.

Т.о. экстремаль функционала $E = E(u)$, $u \in H^1(\Omega)$, $u\big|_{x_1=0} = 0$, $u\big|_{x_2=0} = 0$, $u\big|_{x_2=0} = x_1$, $u\big|_{x_1=1} = x_2$, есть $u = w = x_1 x_2$; неравенство доказано.




**Пример 4.3.** Пусть

$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ — кольцо. Найти

$$\min_{u \in H^1(Q),\, u\big|_{|x|=1}=0} \left( \int_Q \left( |\nabla u|^2 + 4u \right) dx + \int\limits_{|x|=2} u^2 ds \right).$$

**Решение.**

Преобразуем функционал энергии:

$$E(u) = \int_Q \left( |\nabla u|^2 + 4u \right) dx + \int\limits_{|x|=2} u^2 ds = \iint\limits_Q |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_{|x|=2} u^2 ds + 2 \iint_Q 2u dx_1 dx_2 \Rightarrow$$

$$E(u) = (u,u)' + 2(2,u)_{L_2(Q)},$$

где $(u,v)' = \iint_Q \nabla u \cdot \nabla v dx_1 dx_2 + \int_{|x|=2} uv ds$ — скалярное произведение в $\tilde{H}^1(Q) = \left\{ u \in H^1(Q) : u\big|_{|x|=1} = 0 \right\}$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева (это следует из теоремы об эквивалентной норме).

Рассмотрим $\delta u \in \tilde{H}^1(Q)$, $t \in \mathrm{R}$, получим приращение функционала энергии:

$$E(u+t\delta u)-E(u)=(u+t\delta u,u+t\delta u)'+2(2,u+t\delta u)-(u,u)'-2(2,u)=$$

$$=(u,u)'+2t(u,\delta u)'+t^2(\delta u,\delta u)'+2(2,u)+2t(2,\delta u)-(u,u)'-2(1,u)=$$

$$=t^2(\delta u,\delta u)'+2t\left((u,\delta u)'+(2,\delta u)\right)\geqslant 0 \text{ для любого } t\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$(u,\delta u)'+(2,\delta u)=0 \text{ для } \delta u\in\tilde{H}^1(Q).$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$. Вернёмся к интегралам:

$$\iint\limits_Q \nabla u\cdot\nabla(\delta u)dx_1dx_2+\int\limits_{|x|=2} u\delta u ds+\iint\limits_Q 2\delta u dx_1dx_2=0.$$

Предположим дополнительно, что экстремаль $u\in H^2(Q)$.

$$\iint\limits_Q \nabla u\cdot\nabla(\delta u)dx_1dx_2=\iint\limits_Q\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial(\delta u)}{\partial x_j}dx_1dx_2=-\iint\limits_Q\Delta u\cdot\delta u dx_1dx_2+$$

$$+\int\limits_{\partial Q}\delta u\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j ds=-\iint\limits_Q\Delta u\cdot\delta u dx_1dx_2+\int\limits_{|x|=1}\delta u\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{\nu}}ds+\int\limits_{|x|=2}\delta u\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{\nu}}ds=$$

$$=-\iint\limits_Q\Delta u\cdot\delta u dx_1dx_2+\int\limits_{|x|=2}\delta u\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{\nu}}ds.$$ Подставим этот

$$-\iint\limits_Q\Delta u\cdot\delta u dx_1dx_2+\int\limits_{|x|=2}\delta u\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{\nu}}ds+\int\limits_{|x|=2}u\delta u ds+\iint\limits_Q 2\delta u dx_1dx_2=0$$

$$\Rightarrow\iint\limits_Q(-\Delta u+2)\,\delta u dx_1dx_2+\int\limits_{|x|=2}\left(\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{\nu}}+u\right)\delta u ds=0 \text{ для}$$

$\forall\delta u\in\tilde{H}^1(Q)$.

Получим тогда уравнение Эйлера—Лагранжа, проинтегрировав по частям первый из интегралов: результат в интегральное тождества:

- Для любой $\delta u\in\mathscr{D}(Q)=C_0^\infty(Q)\subset\tilde{H}^1(Q)$ имеем

$\iint_Q (-\Delta u + 2)\delta u dx_1 dx_2 = 0$. По лемме Дюбуа-Реймона $\Delta u = 2$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала энергии (уравнение Пуассона).

- Одно краевое условие уже есть: $u\big|_{|x|=1} = 0$.
- Рассмотрим произвольную гладкую функцию $\psi \in C^\infty(C)$, где $C = \{|x| = 2\}$. Тогда можно считать, что $\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + u\right)\psi ds = 0$. Действительно, функцию $\psi$ можно поднять (продолжить) до функции $\delta u \in \tilde{H}^1(Q)$, т.е. $\delta u\big|_C = \psi$, так, чтобы $\operatorname{supp}\delta u \subset \{2 - \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 2\} = Q_\varepsilon$, $\|\delta u\|_{L_2(Q_\varepsilon)} = O(1)$, $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$
$$\left|\iint_{Q_\varepsilon} (-\Delta u + 2)\delta u dx_1 dx_2\right| \leqslant \|-\Delta u + 2\|_{L_2(Q_\varepsilon)}\|\delta u\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \to 0$$
при $\varepsilon \to 0$. По лемме Дюбуа-Реймона $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + u\right|_{|x|=2} = 0$ — краевое условие третьего рода на внешней окружности.

Получили краевую задачу для экстремали:
$$\begin{cases} \Delta u = 2, 1 < r < 2, \ -\infty < \theta < \infty, \\ u(r, \theta + 2\pi) \equiv u(r, \theta), \\ u\big|_{r=1} = 0, \\ u_r + u\big|_{r=2} = 0. \end{cases}$$
Легко видеть, что решение можно найти в виде $u = u(r)$. Имеем одномерную краевую задачу
$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = 2, 1 < r < 2, \\ u(1) = 0, \\ u'(2) + u(2) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения: $u = A\ln r + B + \dfrac{r^2}{2}$. Подстановка в краевые условия даёт уравнения для $A$ и $B$:

Вычисления показывают, что минимум равен
$\dfrac{\pi}{2(1+\ln 4)}(51 - 94\ln 2) \approx -9.318185532.$

**Пример 4.4.** Пусть $B = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\right\}$ — единичный трёхмерный шар. Показать, что для всех функций $u \in H^1(B)$, удовлетворяющих условию $u\big|_{|x|=1} = \cos\theta$, где $\theta$ — широта в сферической системы координат, справедливо неравенство

$$\iiint_B \left( |\nabla u|^2 + 2u \right) dx_1 dx_2 dx_3 \geqslant \frac{56\pi}{45}.$$

Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**Решение.** Имеем вариационную проблему

$$E(u) = \iiint_B \left( |\nabla u|^2 + 2u \right) dx_1 dx_2 dx_3 \to \min,$$

где $u \in H^1(B)$, $u\big|_{|x|=1} = \cos\theta$. Сделаем редукцию: $u = v + w$, в которой $v \in H_0^1(B)$, $w \in H^1(B)$ — функция, удовлетворяющая краевому условию $w\big|_{|x|=1} = \cos\theta$. Проще всего взять $w = x_3 = \rho\cos\theta$, $\rho = |x|$. Преобразуем функционал энергии:

$$E(u) = E(v+w) = \iiint_B \left( |\nabla v + \nabla w|^2 + 2v + 2w \right) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \iiint_B \left( |\nabla v|^2 + 2v \right) dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_B 2\nabla v \cdot \nabla w dx_1 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \iiint_B \left( |\nabla w|^2 + 2w \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$ Вычисляем:

$$B + \frac{1}{2} = 0,\ \frac{A}{2} + 2 + A\ln 2 + B + 2 = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2},\ A = \frac{-7}{1+\ln 4}.$$

Следовательно, экстремаль имеет вид

$$u = -\frac{7\ln r}{1+\ln 4} - \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2} = -\frac{7}{1+\ln 4}\ln|x| + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{2}.$$

- $\iiint_B \left( |\nabla w|^2 + 2w \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_B (1 + 2x_3) dx_1 dx_2 dx_3 =$
  $= \frac{4}{3}\pi + \iiint_B 2x_3 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4}{3}\pi;$
- $\iiint_B 2\nabla v \cdot \nabla w dx_1 dx_2 dx_3 = 2\iiint_B \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3.$

Рассмотрим функционал

$$\tilde{E}(v) = \iiint_B |\nabla v|^2 + 2\iiint_B v dx_1 dx_2 dx_3 + 2\iiint_B \frac{\partial v}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3.$$

По теореме об эквивалентной норме билинейная симметрическая форма $(v_1, v_2)' = \iiint_B \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx_1 dx_2 dx_3$ есть скалярное произведение в $H_0^1(B)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной норме пространства Соболева.

Далее, $H_0^1(B) \ni v \mapsto \langle l, v \rangle = \iiint_B \left( v + \frac{\partial v}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3$ есть линейный ограниченный функционал над $H_0^1(B)$. Поэтому функционал $\tilde{E}$ можно переписать в виде

$$\tilde{E}(v) = (v, v)' + 2\langle l, v \rangle,$$

поэтому к нему применима основная теорема.

Получим уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$. Пусть $v \in H_0^1(B)$ — единственная экстремаль функционала $\tilde{E}$. Рассмотрим вариацию $\delta v \in H_0^1(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$, и найдём приращение функционала:

$$0 \leqslant \tilde{E}(v+t\delta v) - \tilde{E}(v) = (v+t\delta v, v+t\delta v)' + 2\langle l, v+t\delta v\rangle - (v,v)' - 2\langle l, v\rangle =$$
$$= t^2(\delta v, \delta v)' + 2t\left((v,\delta v)' + \langle l, \delta v\rangle\right) \Rightarrow$$

$(v,\delta v)' + \langle l, \delta v\rangle = 0$ для всех $\delta v \in H_0^1(B)$. Перепишем последнее равенство в явном виде:

$$\iiint_B \nabla v \cdot \nabla \delta v dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_B \left(\delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Предположим, что $v \in H^2(B)$. Проинтегрируем по частям первый из тройных интегралов в последней формуле:

$$\iiint_B \nabla v \cdot \nabla \delta v dx_1 dx_2 dx_3 = -\iiint_B \Delta v \cdot \delta v dx_1 dx_2 dx_3,$$

т.к. $\delta v\big|_{\partial B} = 0$. Интегрируем по частям интеграл с $\dfrac{\partial \delta v}{\partial x_3}$:

$$\iiint_B \frac{\partial \delta v}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial B} \delta v\big|_{\partial B} \nu_3 ds - \iiint_B \delta v \frac{\partial 1}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

поскольку $\delta v\big|_{\partial B} = 0$. Итак, если $v \in H_0^1(B) \cap H^2(B)$, то для любой $\delta v \in H_0^1(\Omega)$

$$\iiint_B (-\Delta v + 1)\, \delta v dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Из леммы Дюбуа-Реймона следует, что $\Delta v = 1$ — уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала $\tilde{E}$. Имеем задачу Дирихле для экстремали:

$$\begin{cases} \Delta v = 1, 0 < \rho < 1, \\ v\big|_{\rho=1} = 0, \\ v = O(1), \rho \to +0. \end{cases}$$

Решение этой краевой задачи можно найти в виде $v = v(\rho)$. Имеем одномерную краевую задачу

$$\begin{cases} v'' + \dfrac{2}{\rho} v' = 1, 0 < \rho < 1, \\ v(\rho) = O(1), \rho \to +0, \\ v(1) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения: $v = \dfrac{A}{\rho} + B + \dfrac{1}{6}\rho^2$. Подстановка в асимптотическое и краевое условия даёт константы интегрирования $A$ и $B$: $A = 0$, $B + \dfrac{1}{6} = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{6}$. Отсюда $v = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}\rho^2$. Вычисления показывают, что $\tilde{E}(v) = -\dfrac{4\pi}{45}$. Отсюда $E(u) = \tilde{E}(v) + E(w) = -\dfrac{4\pi}{45} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{56\pi}{45}$.

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $u = v + w = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + x_3$.

**Пример 4.5.** Краевая задача

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

эквивалентна вариационной проблеме вида

$$E(u) = \int_0^1 \left((u')^2 + u^2\right) dx - 2\int_0^1 xu dx \to \min, u \in H^1(0,1).$$

А именно, единственная экстремаль функционала энергии есть обобщённое решение краевой задачи (покажите это самостоятельно). С другой стороны, задача (1) имеет единственное решение, которое легко найти:
$\hat{u}(x) = A\cosh x + B\sinh x + x$, $\hat{u}'(x) = A\sinh x + B\cosh x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\sinh 0 + B\cosh 0 + 1 = 0, \\ A\sinh 1 + B\cosh 1 + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1, \\ A = \dfrac{-1+\cosh 1}{\sinh 1}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hat{u}(x) = \frac{-1+\cosh 1}{\sinh 1}\cosh x - \sinh x + x.$$

Рассмотрим в пространстве $H^1(0,1)$ базис $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ и организуем схему метода Ритца построения минимизирующей последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, сходящейся к экстремали. Пусть $u_k(x) = c_0^{(k)}e_0(x) + c_1^{(k)}e_1(x) + \ldots + c_k^{(k)}e_k(x)$, $(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx$ — стандартное скалярное произведение в $H^1(0,1)$. Тогда вариационная проблема на подпространстве $E_k = \mathrm{Lin}(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ имеет вид

$$E\left(u_k\right) = \sum_{i,j=0}^{k}\left(e_i, e_j\right)c_i^{(k)}c_j^{(k)} - 2\sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)}\left(x, e_i\right)_{L_2(0,1)} \to \min.$$

Пусть $G^{(k)} = \left((e_i, e_j)\right)_{i,j=0}^{k}$ — матрица Грама порядка $(k+1)$ системы $\left\{e_0, e_1, \ldots, e_k\right\}$;

$f^{(k)} = \left((x,e_0)_{L_2(0,1)}, (x,e_1)_{L_2(0,1)} \ldots, (x,e_k)_{L_2(0,1)}\right)^T$ — столбец скалярных произведений. Тогда единственная точка экстремума $\hat{c}^{(k)} = \left(c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \ldots, c_k^{(k)}\right)^T$ есть решение системы линейных уравнений

$$G^{(k)}\hat{c}^{(k)} = f^{(k)} \;\Rightarrow\; \hat{c}^{(k)} = G^{-(k)}f^{(k)}.$$

Итак, $k$-ое приближение Ритца имеет вид $u_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\hat{c}^{(k)}x^k$.

Последовательность приближений Ритца $u_k \to \hat{u}$ при $k \to \infty$ в $H^1(0,1)$.