Разделение переменных в полярных и сферических координатах

1. Полярные координаты

Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

где ρ — полярный радиус, θ — полярный угол, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, x, y — декартовы координаты. Получим формулу (1). Для этого, во-первых, выразим производные по полярным координатам через производные по декартовым координатам:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теперь выразим вторые производные по ρ и θ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \cos\theta\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) -$$

$$-\rho\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-\rho\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}=-\rho\sin\theta\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+$$

$$+\rho\cos\theta\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\rho\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=\rho^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-$$

$$-2\rho^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\rho^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Разделим последнее равенство на ρ^2 и сложим с предыдущим — член со смешанной производной сократится:

$$\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

Пример 3.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Получим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\begin{cases}\Delta u=0, x^2+y^2<R^2,\\ u\big|_{x^2+y^2=R^2}=\varphi\end{cases}$$

разделением переменных в полярных координатах ρ, θ:
$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.
Уравнение Лапласа в полярных координатах ρ, θ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

Шаг 1. Найдём нетривиальные гармонические функции в проколотом круге, имеющие вид $U(\rho,\theta)=Z(\rho)Y(\theta)$.
Подстановка в уравнение Лапласа и периодическое условие $U(\rho,\theta+2\pi)\equiv U(\rho,\theta)$ дают соотношения

$$Z''(\rho)Y(\theta)+\frac{1}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta)+\frac{1}{\rho^2}Z(\rho)Y''(\theta)=0,$$

$$Z(\rho)Y(\theta+2\pi)\equiv Z(\rho)Y(\theta).$$

Из периодического условия и нетривиальности функций Z и Y следует, что $Y(\theta+2\pi)\equiv Y(\theta)$. Разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{\rho^2Z''(\rho)+\rho Z'(\rho)}{Z(\rho)}=\frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)}=\lambda=\text{const},$$

поскольку ρ и θ — независимые переменные. Спектральная задача имеет вид

$$\begin{cases}-Y''(\theta)=\lambda Y(\theta),\ -\infty<\theta<\infty,\\ Y(\theta+2\pi)\equiv Y(\theta).\end{cases}\qquad(3)$$

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $-Y''(\theta)=\lambda Y(\theta)$ следует эквивалентность задачи (3) и задачи вида

$$\begin{cases}-Y''(\theta)=\lambda Y(\theta),\ 0<\theta<2\pi,\\ Y(0)=Y(2\pi),\\ Y'(0)=Y'(2\pi).\end{cases}\qquad(4)$$

Оператор $\mathscr{A}=-\dfrac{d^2}{d\theta^2}$ — неограниченный, самосопряжённый и неотрицательно полуопределённый оператор в пространстве $L_2(0,2\pi)$ с область определения

$$D(\mathcal{A})=\{Y\in H^2(0,2\pi):\ Y(0)=Y(2\pi),\ Y'(0)=Y'(2\pi)\},$$

поэтому его собственные значения принадлежат $[0,+\infty)$. Легко видеть, что $\lambda_0=0$ — собственное значение, $Y_0=1$ — соответствующая ему собственная функция. Пусть $\omega=\lambda$, тогда общее решение уравнения задачи (4) есть $Y(\theta)=A\cos\omega\theta+B\sin\omega\theta$. Подстановка общего решения в условия задачи (4) даёт систему

$$\begin{cases} A(\cos 2\pi\omega - 1) + B\sin 2\pi\omega = 0, \\ A(-\omega \sin 2\pi\omega) + B(\omega \cos 2\pi\omega - \omega) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда её определитель равен нулю. Последний равен $4\omega \sin^2 \pi\omega$. Отсюда характеристическое уравнение для собственных значений задачи (4) есть $\sin^2 \pi\omega = 0$. Его корни $\omega_k = k$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому все положительные собственные значения спектральной задачи есть $\lambda_k = k^2$, а соотвествующие независимые собственные функции, $Y_k^{(1)}(\theta) = \cos(k\theta)$, $Y_k^{(2)}(\theta) = \sin(k\theta)$ (так как при $\omega = k$ (5) тривиальна). Таким образом, все положительные собственные значения задачи (4) (следовательно, и задачи (3)) имеют кратность два. Упорядоченное множество собственных функций

$$\{1, \cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \ldots\}$$

образует ортогональный базис в $L_2(0,2\pi)$.

Шаг 2. Функция $\varphi \in L_2(0,2\pi)$, поэтому она допускает разложение в ряд по собственным функциям из первого шага. Это разложение имеет вид классического тригонометрического ряда Фурье

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta),$$

в котором коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos(k\theta)d\theta,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\sin(k\theta)d\theta \quad (6)$$

следующим из общей формулы для коэффициентов Фурье функции $\varphi \in L_2(0,2\pi)$ относительно ортогонального базиса $\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$: $\varphi_k = \dfrac{(\varphi, e_k)}{\|e_k\|^2}$.

Здесь $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(0,2\pi)$. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0(\rho)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(\rho)\cos(k\theta)+B_k(\rho)\sin(k\theta) \quad (7)$$

с неизвестными коэффициентами-функциями $A_k = A_k(\rho)$ и $B_k = B_k(\rho)$. Перепишем задачу (2) в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0, 0<\rho<R, -\infty<\theta<\infty, \\ u(\rho,\theta+2\pi)\equiv u(\rho,\theta), \\ u(R,\theta)=\varphi(\theta), \\ \max\limits_{\theta}|u(\rho,\theta)|=o(\ln\rho), \rho\to 0. \end{cases}$$

Подставим разложение (7) в уравнение Лапласа и краевое условие Дирихле, формально (т.е. к каждому члену ряда) применив оператор Лапласа и оператор следа на окружности:

$$\frac{1}{2}\left(\rho^2A_0''+\rho A_0'\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\rho^2A_k''+\rho A_k'-k^2A_k\right)\cos k\theta+\left(\rho^2B_k''+\rho B_k'-k^2B_k\right)\sin k\theta=0,$$

$$\frac{A_0(R)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(R)\cos k\theta+B_k(R)\sin k\theta=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta.$$

Приравнивая коэффициенты Фурье из правых частей равенств к соответствующим коэффициентам Фурье из левых частей, имеем уравнения и краевые условия задачек для A_k и B_k.

Также мы должны позаботиться о том, чтобы отыскиваемое решение не имело особенности в центре круга, когда $\rho \to +0$. Пусть $m(\rho)=\max\limits_{\theta}|u(\rho,\theta)|$. Тогда, согласно теореме об устранимой особенности, если $m(\rho) = o(\ln\rho)$ при $\rho \to +0$, то

функция $u = u(\rho, \theta)$ допускает гармоническое продолжение в точку $\rho = 0$. Очевидно, что максимум по углу θ модуля каждого члена ряда (7) есть $\sqrt{A_k(\rho)^2 + B_k(\rho)^2}$ (максимум нулевого члена равен $\frac{1}{2}|A_0(\rho)|$). Поэтому условия $A_k(\rho)=o(\ln \rho)$ при $\rho\to+0$ (k=0,1,2,...), $B_k(\rho)=o(\ln \rho)$ при $\rho\to+0$ ($k \in \mathbb{N}$) необходимы для условий теоремы об устранимой особенности. Эти условия дают краевые задачки для коэффициентов A_k вида

$$\begin{cases} \rho^2 A_k'' + \rho A_k' - k^2 A_k = 0, 0 < \rho < R, \\ A_k(\rho) = o(\ln \rho), \rho \to +0, \\ A_k(R) = a_k, \end{cases} \qquad (8)$$

и вполне аналогичные им краевые задачки для коэффициентов B_k:

$$\begin{cases} \rho^2 B_k'' + \rho B_k' - k^2 B_k = 0, 0 < \rho < R, \\ B_k(\rho) = o(\ln \rho), \rho \to +0, \\ B_k(R) = b_k, \end{cases} \qquad (9)$$

Общее решение уравнения

$$\rho^2 Z'' + \rho Z' - k^2 Z = 0$$

имеет вид $Z_k(\rho) = C_k \rho^{-k} + D_k \rho^k$ для $k \in \mathbb{N}$ и $Z_0(\rho) = C_0 \ln \rho + D_0$ при $k = 0$. Отсюда немедленно получаем единственное решение задачек (8) и (9):

$$A_0(\rho) = a_0, A_k(\rho) = a_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k, B_k(\rho) = b_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, решение задачи (2) можно представить в виде ряда

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \left(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\right), \quad (10)$$

где коэффициенты a_0, a_k и b_k ($k \in \mathbb{N}$) можно найти по формуле (6).

Получим из формулы (10) формулу Пуассона. Для этого подставим выражения для коэффициентов Фурье (6), заменив в них переменную интегрирования θ на ψ, в формулу (10):

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)d\psi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\left(\frac{1}{\pi}\cos(k\theta)\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\cos(k\psi)d\psi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\sin(k\theta)\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\sin(k\psi)d\psi\right).$$ Действуя формально, меняем ряд и интеграл местами, пользуемся одной тригонометрической формулой: $u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)d\psi +$

$$+\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)d\psi\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\left(\cos(k\theta)\cos(k\psi)+\sin(k\theta)\sin(k\psi)\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\cos\left(k(\theta-\psi)\right)\right)\varphi(\psi)d\psi.$$

Представим ядро получившейся интегральной формулы в явном виде, применив древнюю формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии и формулу Эйлера:

$$\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\cos\left(k(\theta-\psi)\right) = -\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\cos\left(k(\theta-\psi)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Re e^{k\left(i(\theta-\psi)+\ln\frac{\rho}{R}\right)} = -\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\Re\sum_{k=0}^{\infty}e^{k\left(i(\theta-\psi)+\ln\frac{\rho}{R}\right)} = -\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\,\Re\frac{1}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\psi)}} = -\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\Re\frac{R}{R-\rho\cos(\theta-\psi)-i\rho\sin(\theta-\psi)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{R(R-\rho\cos(\theta-\psi))}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{-R^2+2R\rho\cos(\theta-\psi)-\rho^2+2R^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2} =$$

$$= \frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\frac{1}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}.$$

Итак, интегральная формула для решения задачи (2) имеет вид

$$u(\rho,\theta) = \frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\psi)d\psi}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}. \quad (11)$$

Сравним её с формулой, которую мы получили в теме 4 практических занятий прошлого семестра:

$$u(|x^0|\cos\theta, |x^0|\sin\theta) = \frac{R^2-|x^0|^2}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\psi)}{R^2+|x^0|^2-2R|x^0|\cos(\psi-\theta)}Rd\psi$$

(мы поменяли обозначали переменной интегрирования и внешней переменной — полярного угла). Поскольку $|x^0| = \rho$, эта формула совпадает с формулой (11).

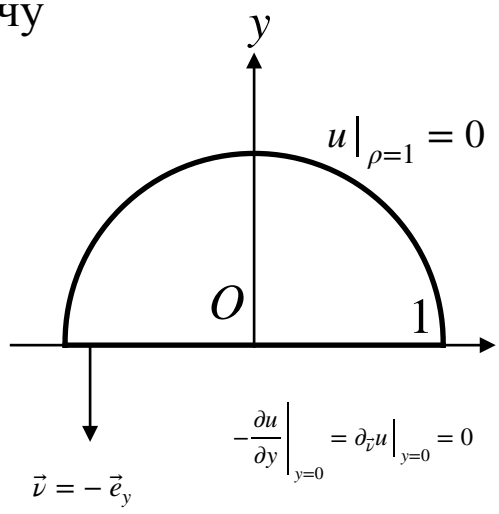
Пример 3.5. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в полудиске. Пусть $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, y > 0\}$ (полудиск).Найдём собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ в Ω с краевыми условиями. Имеем задачу

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u\big|_{\rho=1} = 0, \\ -u_\theta\big|_{\theta=0} = 0,\ u_\theta\big|_{\theta=\pi} = 0, \\ \max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|u(\rho,\theta)| = O(1), \rho \to 0. \end{cases} \quad (12)$$

Найдём собственные значения и собственные функции методом разделения переменных.

Шаг 1. Рассмотрим специальную задачу

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda U, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ U_\theta\big|_{\theta=0} = 0,\ U_\theta\big|_{\theta=\pi} = 0. \end{cases}$$



Подставим в неё $U(\rho,\theta) = Z(\rho)Y(\theta)$:

$$\begin{cases} -Z''(\rho)Y(\theta) - \frac{1}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta) - \\ -\frac{1}{\rho^2}Z(\rho)Y''(\theta) = \lambda Z(\rho)Y(\theta), \\ 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ Z(\rho)Y'(0) \equiv 0, Z(\rho)Y'(\pi) \equiv 0. \end{cases}$$

Из краевых условий немедленно следует, что $Y'(0) = 0$, $Y'(\pi) = 0$. Разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) + \lambda\rho^2 Z(\rho)}{Z(\rho)} = \frac{-Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \text{const} = \mu.$$

Имеем задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} -Y''(\theta) = \mu Y(\theta), 0 < \theta < \pi, \\ Y'(0) = 0, Y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Её решение: $\mu_k = k^2$, $Y_k(\theta) = \cos(k\theta)$, $k = 0,1,2,\ldots$

Шаг 2. Вернёмся к исходной спектральной задаче. Сделаем теперь подстановку $u(\rho,\theta) = Z(\rho)Y_k(\theta) = Z(\rho)\cos(k\theta)$.

1) Условие Дирихле: $Z(1)Y_k(\theta) \equiv 0 \Rightarrow Z(1) = 0$.

2) Асимптотическое условие:

$$\max_{\theta\in[0,\pi]} |Z(\rho)\cos(k\theta)| = |Z(\rho)| = O(1),\ \rho \to +0 \Rightarrow$$

$Z(\rho) = O(1)$, $\rho \to +0$.

Уравнение для $Z = Z(\rho)$ имеет вид

$\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) + \left(\lambda\rho^2 - k^2\right) Z(\rho) = 0$ или

$-Z''(\rho) - \frac{1}{\rho}Z'(\rho) + \frac{k^2}{\rho^2}Z(\rho) = \lambda Z(\rho)$. Имеем спектральную задачку для функции $Z = Z(\rho)$:

$$\begin{cases} -Z''(\rho) - \dfrac{1}{\rho}Z'(\rho) + \dfrac{k^2}{\rho^2}Z(\rho) = \lambda Z(\rho), 0 < \rho < 1, \\ Z(1) = 0, Z(\rho) = O(1), \rho \to +0. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть $\lambda = 0$, тогда имеем уравнение

$$\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) - k^2 Z(\rho) = 0.$$

Общее решение имеет вид $Z_k(\rho) = C_k\rho^{-k} + D_k\rho^k$ для $k \in \mathbb{N}$ и $Z_0(\rho) = C_0 \ln\rho + D_0$ при $k = 0$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, тогда из асимптотического условия следует, что $C_k = 0$, а из краевого условия следует, что и $D_k = 0$. Аналогично: $C_0 = 0$, $D_0 = 0$.

Отсюда следует, что $\lambda = 0$ — не с.з.

Пусть теперь $\lambda > 0$; сделаем замену независимой переменной: $r = \rho\sqrt{\lambda}$. Имеем $Z_\rho = Z_r\dfrac{dr}{d\rho} = \sqrt{\lambda}Z_r$, $Z_{\rho\rho} = \lambda Z_{rr}$. Уравнение с новой переменной r имеет вид

$$\frac{r^2}{\lambda}\lambda Z_{rr} + \frac{r}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}Z_r + \left(r^2 - k^2\right)Z = 0 \Rightarrow$$

$r^2 Z_{rr} + rZ_r + \left(r^2 - k^2\right)Z = 0$ — уравнение Бесселя.

Общее решение уравнения Бесселя имеет вид $Z(r) = AJ_k(r) + BY_k(r)$, где A, B — константы интегрирования, J_k — функция Бесселя первого рода порядка k, Y_k — функция Бесселя второго рода порядка k. Свойства функций Бесселя:

1) J_k — целая аналитическая функция, Y_k — мероморфная функция с единственным полюсом в нуле.
2) Для чётных k J_k — чётная функция, для нечётных k J_k — нечётная функция.
3) Действительные корни уравнения $J_k(r) = 0$ образуют счётное множество, симметричное относительно нуля, не имеющее конечных предельных точек, эти корни простые (кроме, может быть, нуля).

Обозначим $r_j^{(k)}$ — j-ый положительный нуль функции Бесселя первого рода порядка k, $k = 0,1,2,...$, $j = 1,2,...$ Общее решение уравнения $\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z'(\rho) + \left(\lambda\rho^2 - k^2\right) Z(\rho) = 0$ имеет вид

$$Z(\rho) = AJ_k\left(\rho\sqrt{\lambda}\right) + BY_k\left(\rho\sqrt{\lambda}\right).$$

Из асимптотического условия задачки (13) следует, что $B = 0$, потому что функция Бесселя второго рода имеет полюс в нуле. Подстановка в краевое условие задачки (13) даёт $AJ_k\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow J_k\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$. Итак,

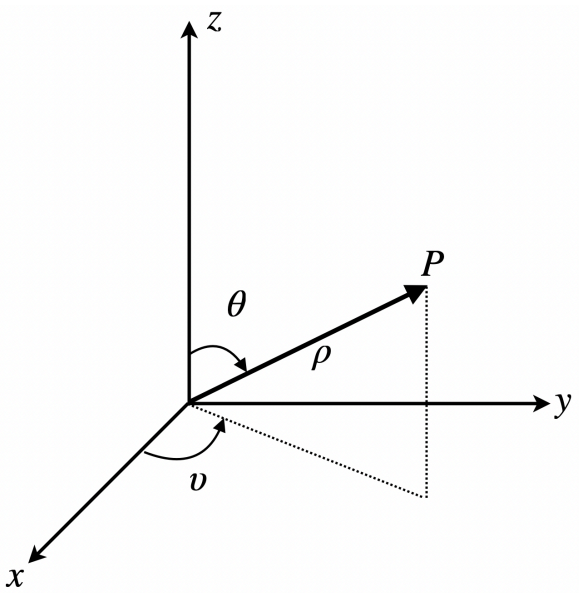
- $\lambda_{jk} = \left(r_j^{(k)}\right)^2$, $k = 0,1,2,\ldots$, $j = 1,2,\ldots$ — собственные значения спектральной задачи (12);
- $u_{jk}(\rho,\theta) = J_k\left(r_j^{(k)}\rho\right)\cos(k\theta)$ — собственная функция, соответствующая с.з. λ_{jk}.

Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

2. Сферические координаты

Выражение декартовых координат через сферические:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\upsilon, \\ y = \rho \sin\theta \sin\upsilon, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$



Якобиан равен $\rho^2 \sin\theta$.

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\upsilon^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\upsilon^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}. \quad (14)$$

Непосредственный вывод формулы (14) довольно сложен, поэтому обратимся к тензорному анализу и римановой геометрии.

Пусть $(M, \mathbf{g})$ — риманово многообразие, где M — гладкое многообразие размерности n, $\mathbf{g}$ — метрический тензор. В локальной карте $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ метрический тензор задаётся компонентами g_{ij} или g^{ij}. Обозначим определитель матрицы $\left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ через g.

Eugenio Beltrami (1835–1900)

Оператор Лапласа—Бельтрами, действующий на скалярные поля или гладкие функции из $C^\infty(M)$, определяется как $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$. Явная формула имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g}\, \nabla^j u \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Упражнение: показать, что в сферических координатах матрица ковариантных компонент метрического тензора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \left(g^{ij} \right)_{i,j=1}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\sqrt{g} = \rho^2 \sin\theta$. Получим оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho^2 \sin\theta \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \upsilon} \left(\rho^2 \sin\theta \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \upsilon^2}.$$

Пример 3.6. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Получим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трёхмерном шаре

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ u\big|_{x^2+y^2+z^2=1} = \varphi \end{cases}$$

разделением переменных в сферических координатах ρ, θ, υ.

Шаг 1. Найдём нетривиальные гармонические функции в разрезанном по отрезку между полюсами шара. Имеем

уравнение Лапласа в сферических координатах ($0 < \rho < 1$, $0 < \theta < \pi$, $-\infty < \upsilon < +\infty$) и периодическое условие по долготе:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \upsilon^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0,$$

$$U(\rho, \theta, \upsilon + 2\pi) \equiv U(\rho, \theta, \upsilon).$$

Будем искать решение этой специальной задачи в виде $U = Z(\rho)Y(\theta, \upsilon)$. Немедленно получаем периодическое условие для функции Y: $Y(\theta, \upsilon + 2\pi) \equiv Y(\theta, \upsilon)$. Подстановка Фурье в уравнение Лапласа даёт

$$Z''(\rho)Y(\theta,\upsilon) + \frac{1}{\rho^2}Z(\rho)\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}Z(\rho)\frac{\partial^2 Y}{\partial \upsilon^2} + \frac{2}{\rho}Z'(\rho)Y(\theta,\upsilon) + \frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}Z(\rho)\frac{\partial Y}{\partial \theta} = 0;$$

$$\rho^2\frac{Z''(\rho)}{Z(\rho)} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \upsilon^2} + 2\rho\frac{Z'(\rho)}{Z(\rho)} + \frac{\cos\theta}{Y\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \theta} = 0;$$

$$\rho^2\frac{Z''(\rho)}{Z(\rho)} + 2\rho\frac{Z'(\rho)}{Z(\rho)} = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \upsilon^2} - \frac{\cos\theta}{Y\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \lambda.$$

Так как ρ, θ, υ — независимые переменные, то обе части последнего равенства — константа. Обозначим её через λ и рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \upsilon^2} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \lambda Y,\ \theta \in (0,\pi),\ \upsilon \in (-\infty, \infty),$$

$$Y(\theta, \upsilon + 2\pi) \equiv Y(\theta, \upsilon).$$

Не хватает асимптотических условий при $\theta \to +0$, $\theta \to \pi - 0$: $Y(\theta, \upsilon) = O(1)$ при $\theta \to +0$ и $\theta \to \pi - 0$.

Мы получили спектральную задачу для противоположного оператора Лапласа—Бельтрами на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial \upsilon^2} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{\partial Y}{\partial \theta} = \lambda Y, \theta \in (0,\pi), \upsilon \in (-\infty, +\infty), \\ Y(\theta, \upsilon + 2\pi) \equiv Y(\theta, \upsilon), \\ Y(\theta) = O(1), \theta \to +0, \theta \to \pi - 0. \end{cases}$$

Решим эту задачу методом разделения переменных.

Положим $Y(\theta,\upsilon)=V(\theta)W(\upsilon)$. Подстановка в периодическое условие сразу даёт $W(\upsilon+2\pi)\equiv W(\upsilon)$ — периодическое условие для функции W. Разделяем переменные θ, υ в уравнении:

$$-\frac{1}{VW}V''W-\frac{1}{VW\sin^2\theta}VW''-\frac{\cos\theta}{VW\sin\theta}V'W=\lambda;$$

$$-\frac{1}{V}V''-\frac{1}{W\sin^2\theta}W''-\frac{\cos\theta}{V\sin\theta}V'=\lambda\Bigg|\cdot\sin^2\theta;$$

$$\mu=\text{const}=-\frac{W''}{W}=\sin^2\theta\frac{V''}{V}+\cos\theta\sin\theta\frac{V'}{V}+\lambda\sin^2\theta.$$

Имеем одномерную спектральную задачу:

$$\begin{cases}-W''(\upsilon)=\mu W(\upsilon),\ -\infty<\upsilon<\infty,\\ W(\upsilon+2\pi)\equiv W(\upsilon).\end{cases}$$

Её решение: $\mu_0=0\Rightarrow W_0(\upsilon)=1$; $\mu_k=k^2\Rightarrow W_k^{(1)}(\upsilon)=\cos(k\upsilon)$, $W_k^{(2)}(\upsilon)=\sin(k\upsilon)$.

Относительно функции $V=V(\theta)$ имеем спектральную задачу вида

$$\begin{cases}\sin^2\theta\frac{V''}{V}+\cos\theta\sin\theta\frac{V'}{V}+\lambda\sin^2\theta=k^2,0<\theta<\pi,\\ V(\theta)=O(1),\theta\to+0,\theta\to\pi-0.\end{cases}\qquad(15)$$

Преобразуем уравнение:

$$-V''-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}V'+\frac{k^2}{\sin^2\theta}V=\lambda V;$$

$$V''+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}V'+\left(\lambda-\frac{k^2}{\sin^2\theta}\right)V=0;$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{k^2}{\sin^2\theta}\right)V=0.$$

Сделаем замену: $\xi=\cos\theta$, $\theta=\arccos\xi$. Имеем

- $\dfrac{dV}{d\theta}=-\sin\theta\dfrac{dV}{d\xi}$;

- $\sin\theta \dfrac{dV}{d\theta} = -\sin^2\theta \dfrac{dV}{d\xi} = -\left(1-\xi^2\right)\dfrac{dV}{d\xi}$;
- $\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{dV}{d\theta}\right) = -\dfrac{-\sin\theta}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\dfrac{dV}{d\xi}\right) = \dfrac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\dfrac{dV}{d\xi}\right)$.

Преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{dV}{d\xi}\right) + \left(\lambda - \frac{k^2}{1-\xi^2}\right)V = 0. \quad (16)$$

Факт из аналитической теории дифференциальных уравнений: уравнение (16) имеет нетривиальные решения без особенностей в точках $\xi = \pm 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_m = m(m+1)$, $m = 0,1,2,\ldots$

Полиномы Лежандра: $P_m(\xi) = \dfrac{1}{2^m m!}\dfrac{d^m}{d\xi^m}\left(\left(\xi^2-1\right)^m\right)$ — собственная функция, отвечающая с.з. $\lambda_m = m(m+1)$ при $k = 0$. Полиномы Лежандра также получаются в процессе ортогонализации системы мономов $\left\{1,\xi,\xi^2,\xi^3,\ldots\right\}$ в пространстве $L_2(-1,1)$. Первые полиномы Лежандра:

$$P_0(\xi) = 1,\ P_1(\xi) = \xi,\ P_2(\xi) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},\ P_3(\xi) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Можно показать, что $(P_n, P_m)_{L_2(-1,1)} = \dfrac{2}{2m+1}\delta_{nm}$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ в уравнении (16). Тогда собственные функции, отвечающие с.з. $\lambda_m = m(m+1)$, есть

$$V_{mk}(\xi) = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{k}{2}} P_m^{(k)}(\xi), \quad (17)$$

где $k = 1,\ldots,m$, $P_m^{(k)} = \dfrac{d^k P_m}{d\xi^k}$ — присоединённые полиномы Лежандра. Функции (17) есть присоединённые функции Лежандра. Присоединённые функции также образуют ортогональный базис в $L_2(-1,1)$, причём

$$(V_{nk}, V_{mk})_{L_2(-1,1)} = \frac{2}{2m+1}\frac{(m+k)!}{(m-k)!}\delta_{nm}.$$

Итак, собственные значения и собственные функции противоположного оператора Лапласа—Бельтрами на сфере $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$:

- $\lambda_m = m(m+1)$, $m = 0,1,2,\ldots$ — собственные значения;
- $Y_{mk}^{(1)} = \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\cos k\upsilon$, $Y_{mk}^{(2)} = \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\sin k\upsilon$ — сферические функции, образующие ортогональный базис в пространстве $L_2\left(\mathbb{S}^2\right)$, $k = 0,1,\ldots,m$.

Чему равна кратность r_m m-го с.з.?

- $m = 0, \lambda_0 = 0, \{1\} \Rightarrow r_0 = 1$;
- $m = 1, \lambda_1 = 2, \left\{P_1 = \cos\theta, Y_{11}^{(1)} = \sin\theta\cos\upsilon, Y_{11}^{(2)} = \sin\theta\sin\upsilon\right\} \Rightarrow r_1 = 3$;

…

Общая формула: $r_m = 1 + 2m$.

Шаг 2.

Будем искать решение краевой задачи Дирихле в виде ряда Фурье по сферическим функциям:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}A_{m0}(\rho)P_m(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{m}\sin^k\theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\left(A_{mk}(\rho)\cos k\upsilon + B_{mk}(\rho)\sin k\upsilon\right)\right).$$

Разложим граничную функцию в ряд по сферическим функциям:

$$\varphi(\theta,\upsilon) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}a_{m0}P_m(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{m}\sin^k\theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\left(a_{mk}\cos k\upsilon + b_{mk}\sin k\upsilon\right)\right),$$

где

$$a_{mk} = \frac{1}{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(m-k)!}{(m+k)!}\int_0^{2\pi}d\upsilon\int_0^{\pi}\varphi(\theta,\upsilon)\sin^k\theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\cos k\upsilon\sin\theta d\theta,$$

$$b_{mk} = \frac{1}{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(m-k)!}{(m+k)!}\int_0^{2\pi}d\upsilon\int_0^{\pi}\varphi(\theta,\upsilon)\sin^k\theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\sin k\upsilon\sin\theta d\theta,$$

$m = 0,1,2,\ldots$, $k = 0,\ldots,m$ — коэффициенты Фурье разложения граничной функции φ.

Условия на коэффициенты Фурье решения:

$A_{mk}(1) = a_{mk}$, $B_{mk}(1) = b_{mk}$;

$A_{mk}(\rho) = o\left(\rho^{-1}\right)$, $B_{mk}(\rho) = o\left(\rho^{-1}\right)$, $\rho \to 0$. Уравнение имеет вид $\rho^2 \dfrac{A''_{mk}(\rho)}{A_{mk}(\rho)} + 2\rho \dfrac{A'_{mk}(\rho)}{A_{mk}(\rho)} = m(m+1)$ или

$$\rho^2 A''_{mk} + 2\rho A'_{mk} - m(m+1)A_{mk} = 0.$$

Уравнение для коэффициента B_{mk} аналогичное:

$$\rho^2 B''_{mk} + 2\rho B'_{mk} - m(m+1)B_{mk} = 0.$$

Рассмотрим подстановку $A_{mk} = \rho^s$, где s — неизвестный показатель. Получим:

$\rho^2 s(s-1)\rho^{s-2} + 2\rho s \rho^{s-1} - m(m+1)\rho^s = 0$;

$s^2 - s + 2s - m(m+1) = 0$;

$s^2 + s - m(m+1) = 0$;

$s_1 = -m-1$, $s_2 = m$ — корни (по обратной теореме Виета).

Общее решение уравнения имеет вид

$$A_{mk}(\rho) = C_{mk}\rho^{-m-1} + D_{mk}\rho^m,\ m = 0,1,2,\ldots$$

Из асимптотического условия следует, что $C_{mk} = 0$.
Подстановка в краевое условие даёт $a_{mk} = A_{mk}(1) = D_{mk}$.

Таким образом, $A_{mk}(\rho) = a_{mk}\rho^m$. Аналогично, имеем $B_{mk}(\rho) = b_{mk}\rho^m$. Ряд Фурье для решения задачи Дирихле имеет вид

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \left(\frac{1}{2} a_{m0} P_m(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{m} \sin^k\theta P_m^{(k)}(\cos\theta)\left(a_{mk}\cos k\upsilon + b_{mk}\sin k\upsilon\right) \right).$$