КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ: МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

ПОСТАНОВКА ДЛЯ НЕЧЁТНЫХ ВАРИАНТОВ. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в квадрате $(0,\pi) \times (0,\pi)$ с условиями Дирихле / Неймана / Робена на границе (любой их комбинацией). Граничные функции предполагаются квадратично интегрируемыми. Требуется решить краевую задачу методом Фурье, а именно:

- разделить переменные и получить задачу Штурма–Лиувилля;
- решить задачу Штурма–Лиувилля, т.е. найти её собственные значения и собственные функции;
- представить решение краевой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, разложить в ряды Фурье граничные функции;
- получить и решить краевые задачки для коэффициентов Фурье;
- из ряда Фурье для решения краевой задачи получить интегральное представление, выписать выражения для интегральных ядер в виде рядов.

ПОСТАНОВКА ДЛЯ ЧЁТНЫХ ВАРИАНТОВ. Пусть ρ, θ — полярные координаты. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

в одной из следующих областей: круг, кольцо, полукруг или сектор круга. Граничная функция предполагается квадратично интегрируемой. Требуется найти интегральное представление решения краевой задачи, выполнив разделение переменных в полярных координатах. Для этого:

- разделить переменные, получить и решить спектральную задачу (задачу Штурма–Лиувилля);
- представить решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи, предварительно разложив в аналогичный ряд правую часть краевого условия;
- подставить этот ряд в краевую задачу и получить краевые задачки относительно коэффициентов разложения (коэффициентов Фурье) (краевые задачи в круге или секторе круга дополняются асимптотическим условием при $\rho \to 0$, обеспечивающим единственность решения);
- решить краевые задачки и найти коэффициенты Фурье;
- получить формулу интегрального представления решения краевой задачи и просуммировать (по возможности) интегральное ядро.

Ресурсы для решения инд. дом. задания #2

1. Материалы практической темы #3 «Разделение переменных в декартовых, полярных и сферических координатах»: первая часть, вторая часть.

2. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.
3. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд.,стереотипное. М.: МЦНМО, 2004.
4. Комеч А.И. Практические решение уравнений математической физики. Механико-математический факультет МГУ, 1993. http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf

Номер варианта студентки / студента вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 20**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **11.04.26, 23:59**.

Список вариантов

Вариант 1.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u\big|_{x=0} = \alpha(y),\ u_x\big|_{x=\pi} = \beta(y), \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u_x + u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ -u_\theta\big|_{\theta=0} = 0,\ u_\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u\big|_{y=\pi} = \psi(x). \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}, \\ u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u_y + u\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < \rho < 2, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u\big|_{\rho=1} = 0,\ u\big|_{\rho=2} = \varphi(\theta). \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ -u_x\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = 0, \\ -u_y\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u\big|_{y=\pi} = \psi(x). \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u_\rho\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u_x - u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ -u_y\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u_y\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u_\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u\big|_{x=0} = \alpha(y),\ u\big|_{x=\pi} = \beta(y), \\ -u_y\big|_{y=0} = 0,\ u_y\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}, \\ u_\rho\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ -u_\theta\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ -u_x\big|_{x=0} = \alpha(y),\ u_x + u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u + u_y\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < \rho < 2, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u\big|_{\rho=1} = 0,\ u_\rho\big|_{\rho=2} = \varphi(\theta). \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u_x - u\big|_{x=0} = 0,\ u_x\big|_{x=\pi} = \beta(y), \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u_y\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u_\rho + u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta). \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ -u_x\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = 0, \\ -u_y + u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \rho < 1, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u_\rho\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta). \end{cases}$$