ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Дано: краевая задача для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ или $n = 3$, с условиями Дирихле или Неймана на гладких кусках границы.

Требуется:

1) записать краевую задачу, которой должна удовлетворять функция Грина;
2) методом отражений или методом конформных преобразований построить функцию Грина краевой задачи (сопроводить построение необходимыми иллюстрациями и пояснениями);
3) получить общую формулу интегрального представления решения задачи в виде, пригодным для дальнейших вычислений.

Номер варианта студента/студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 22**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Дедлайн для всех групп — **14.03.26, 23:59**.

Ресурсы для решения инд. дом. задания #1

1. Материалы к практическим занятиям по теме #1 «Функция Грина»: первая часть, вторая часть.
2. Третья глава «Функция Грина» книги А.Е. Байкова.
3. А.Н. Боголюбов и др. Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ, 2012.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.

Список вариантов

Вариант 1	**Вариант 2**
$\Omega = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < \pi\} \subset \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big\|_{y=0} = 0, \\ u\big\|_{y=\pi} = \varphi(x). \end{cases}$	$\Omega = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big\|_{y=0} = \varphi(x), \\ -u_x\big\|_{x=0} = 0. \end{cases}$

Вариант 3

$$\Omega = \{\,|x| < 1, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{|x|=1} = 0, \\ u\big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right). \end{cases}$$

Вариант 4

$$\Omega = \{x > 0, 0 < y < \pi\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{x=0} = \varphi(y), \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u\big|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$$

Вариант 5

$$\Omega = \left\{0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 0, \\ u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta). \end{cases}$$

Вариант 6

$$\Omega = \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{x_1=0} = 0,\ u\big|_{x_2=0} = 0 \\ u\big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right). \end{cases}$$

Вариант 7

$$\Omega = \left\{x^2 + y^2 < 1, y > 0\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ -u_y\Big|_{y=0} = 0, \\ u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta). \end{cases}$$

Вариант 8

$$\Omega = \left\{0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{y=0} = 0,\ u\big|_{x=0} = \varphi(y), \\ u\big|_{\rho=1} = 0. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\Omega = \{\,|x| < 1, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{|x|=1} = 0, \\ -u_{x_3}\Big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right). \end{cases}$$

Вариант 10

$$\Omega = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ -u_y\Big|_{y=0} = 0, \\ u\big|_{x=0} = \varphi(y). \end{cases}$$

Вариант 11

$$\Omega = \{0 < x < \pi, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=\pi} = \varphi(y), \\ u\big|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 12

$$\Omega = \{x_2 > 0, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{x_2=0} = 0, \\ -u_{x_3}\Big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right). \end{cases}$$

Вариант 13

$$\Omega = \left\{\rho > 0, 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\theta=0} = \varphi(\rho),\ u\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = 0. \end{cases}$$

Вариант 14

$$\Omega = \{\,|x| < 1, x_2 > 0, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{|x|=1} = 0, \\ u\big|_{x_2=0} = \varphi\left(x_1, x_3\right),\ u\big|_{x_3=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 15

$$\Omega = \left\{x^2 + y^2 < 1, y > 0\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x), \\ u\big|_{\rho=1} = 0. \end{cases}$$

Вариант 16

$$\Omega = \{x > 0, 0 < y < \pi\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u\big|_{y=\pi} = 0, \\ u\big|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 17

$$\Omega = \left\{0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\theta=0} = \varphi(\rho),\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0, \\ u\big|_{\rho=1} = 0. \end{cases}$$

Вариант 18

$$\Omega = \left\{\rho > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \varphi(\rho). \end{cases}$$

Вариант 19

$$\Omega = \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{x_1=0} = 0,\ -u_{x_2}\Big|_{x_2=0} = 0 \\ u\big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right). \end{cases}$$

Вариант 20

$$\Omega = \{\,|x| < 1, x_2 > 0, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{|x|=1} = 0, \\ u\big|_{x_2=0} = 0,\ -u_{x_3}\Big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right). \end{cases}$$

Вариант 21

$$\Omega = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ -u_y\Big|_{y=0} = 0,\ -u_x\Big|_{x=0} = \varphi(y). \end{cases}$$

Вариант 22

$$\Omega = \left\{0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = 0, \\ u\big|_{\rho=1} = \varphi(\theta). \end{cases}$$