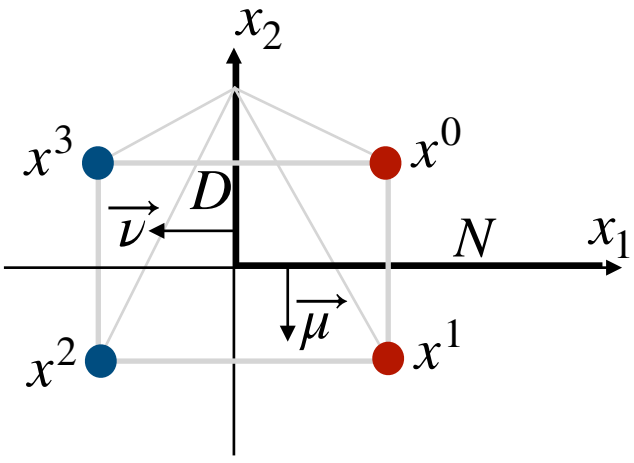
Функция Грина краевых задач для уравнения Лапласа: примеры решений инд. задания #1

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу со смешанными условиями ($n = 2$)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, \\ -u_{x_2}\big|_{x_2=0} = 0, \\ u\big|_{x_1=0} = \varphi(x_2)\,. \end{cases}$$

Требуется: определить и построить функцию Грина задачи, получить формулу интегрального представления решения.

Решение.



Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $\vec{\nu} = -\vec{e}_1$, $\vec{\mu} = -\vec{e}_2$,

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{\nu}}\bigg|_{x_1=0} = -\frac{\partial G}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{\mu}}\bigg|_{x_2=0} = -u_{x_2}\big|_{x_2=0} = 0.$$

Функция Грина $G = G(x, x^0)$ задачи Неймана удовлетворяет в любой $x^0 \in \Omega$ задаче

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x - x^0), x \in \Omega, \\ -G_{x_2}\Big|_{x_2=0} = 0,\ G\Big|_{x_1=0} = 0. \end{cases}$$

Имеем $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)^T$, $x^1 = \left(x_1^0, -x_2^0\right)^T$, $x^3 = \left(-x_1^0, x_2^0\right)^T$, $x^2 = \left(-x_1^0, -x_2^0\right)^T$.

Функция Грина имеет вид

$$G\left(x, x^0\right) = E\left(x - x^0\right) + E\left(x - x^1\right) - E\left(x - x^2\right) - E\left(x - x^3\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^0| + \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^1| - \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^2| - \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^3| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x - x^0||x - x^1|}{|x - x^2||x - x^3|}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2(x_1 - x_1^0)}{2|x - x^0|^2} + \frac{2(x_1 - x_1^1)}{2|x - x^1|^2} - \frac{2(x_1 - x_1^2)}{2|x - x^2|^2} - \frac{2(x_1 - x_1^3)}{2|x - x^3|^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_1 - x_1^0}{|x - x^0|^2} + \frac{x_1 - x_1^0}{|x - x^1|^2} - \frac{x_1 + x_1^0}{|x - x^2|^2} - \frac{x_1 + x_1^0}{|x - x^3|^2}\right).$$

$$-\frac{\partial G}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{|x - x^0|^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{|x - x^1|^2}\Big|_{x_1=0} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 + x_2^0)^2} \Rightarrow$$

$$u(x^0) = \int\limits_{x_1=0} \frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{\nu}}\Big|_{x_1=0} \varphi(x) ds_x \Rightarrow$$

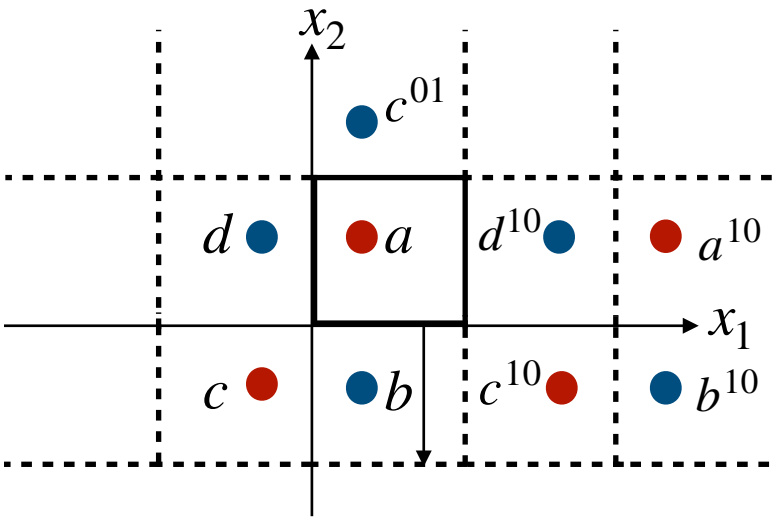
$$u\left(x_1^0, x_2^0\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + \frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 + x_2^0)^2}\right)\varphi(x_2) dx_2.$$

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в квадрате ($n = 2$)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x_1, x_2) \in \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ u\big|_{x_1=0} = 0, \\ u\big|_{x_1=1} = 0, \\ u\big|_{x_2=0} = \varphi(x_1), \\ u\big|_{x_2=1} = 0. \end{cases}$$

Требуется: построить функцию Грина методом отражений, получить формулу интегрального представления решения.

Решение.



Определение функции Грина стандартное (мы имеем дело с внутренней задачи Дирихле). Рассмотрим два семейства прямых: горизонтальные прямые $x_2 = \beta, \beta \in \mathbb{Z}$; вертикальные прямые $x_1 = \alpha, \alpha \in \mathbb{Z}$. Квадрат $Q_{00} = (-1,1) \times (-1,1)$ назовём *основным*. В этом квадрате есть четыре заряда в точках $a = \left(x_1^0, x_2^0\right)^T$, $b = \left(x_1^0, -x_2^0\right)^T$, $c = \left(-x_1^0, -x_2^0\right)^T$, $d = \left(-x_1^0, x_2^0\right)^T$.

Рассмотрим также квадраты $Q_{jk} = (-1 + 2j, 1 + 2j) \times (-1 + 2k, 1 + 2k), j, k \in \mathbb{Z}$. Они дают

замощение всей плоскости. В каждом таком квадрате рассмотрим точки
$a^{jk} = \left(x_1^0 + 2j, x_2^0 + 2k\right)^T$, $b^{jk} = \left(x_1^0 + 2j, -x_2^0 + 2k\right)^T$,
$c^{jk} = \left(-x_1^0 + 2j, -x_2^0 + 2k\right)^T$, $d^{jk} = \left(-x_1^0 + 2j, x_2^0 + 2k\right)^T$
и поместим в них заряды соответствующих знаков (положительные заряды поместим в точки a^{jk} и c^{jk}; отрицательные — в точки b^{jk} и d^{jk}). Поле от зарядов в квадрате Q_{jk} есть

$$G_{jk}(x, x^0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|x - a^{jk}\right| - \frac{1}{2\pi}\ln\left|x - b^{jk}\right| + \frac{1}{2\pi}\ln\left|x - c^{jk}\right| -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln\left|x - d^{jk}\right| = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left|x - a^{jk}\right|\left|x - c^{jk}\right|}{\left|x - b^{jk}\right|\left|x - d^{jk}\right|}.$$

Функция Грина задачи Дирихле в квадрате имеет вид

$$G(x, x^0) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} G_{jk}(x, x^0) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left|x - a^{jk}\right|^2\left|x - c^{jk}\right|^2}{\left|x - b^{jk}\right|^2\left|x - d^{jk}\right|^2} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\prod_{j,k=-\infty}^{\infty}\frac{\left|x - a^{jk}\right|^2\left|x - c^{jk}\right|^2}{\left|x - b^{jk}\right|^2\left|x - d^{jk}\right|^2} = \frac{1}{2\pi}\ln\prod_{j,k=-\infty}^{\infty}\frac{\left(x_1 - x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0 - 2k\right)^2}{\left(x_1 - x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 + x_2^0 - 2k\right)^2} \cdot$$
$$\cdot\frac{\left(x_1 + x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 + x_2^0 - 2k\right)^2}{\left(x_1 + x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0 - 2k\right)^2},$$ однако для нас всё же лучше оставить ряд и не объединять логарифмы в один.

Получим формулу интегрального представления решения задачи Дирихле в квадрате. Имеем, во-первых, $\left.\frac{\partial G}{\partial\overrightarrow{\nu}}\right|_{x_2=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$; во-вторых, $\frac{\partial G_{jk}}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\frac{x_2 - a_2^{jk}}{\left|x - a^{jk}\right|^2} -$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{x_2-b_2^{jk}}{\left|x-b^{jk}\right|^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{x_2-c_2^{jk}}{\left|x-c^{jk}\right|^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{x_2-d_2^{jk}}{\left|x-d^{jk}\right|^2};$$

$$-\frac{\partial G_{jk}}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{a_2^{jk}}{\left|x-a^{jk}\right|^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{b_2^{jk}}{\left|x-b^{jk}\right|^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{c_2^{jk}}{\left|x-c^{jk}\right|^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{d_2^{jk}}{\left|x-d^{jk}\right|^2}\bigg|_{x_2=0}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{x_2^0+2k}{\left(x_1-x_1^0-2j\right)^2+\left(-x_2^0-2k\right)^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{-x_2^0+2k}{\left(x_1-x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2^0-2k\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{-x_2^0+2k}{\left(x_1+x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2^0-2k\right)^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{x_2^0+2k}{\left(x_1+x_1^0-2j\right)^2+\left(-x_2^0-2k\right)^2}.$$

Отсюда формула интегрального представления есть

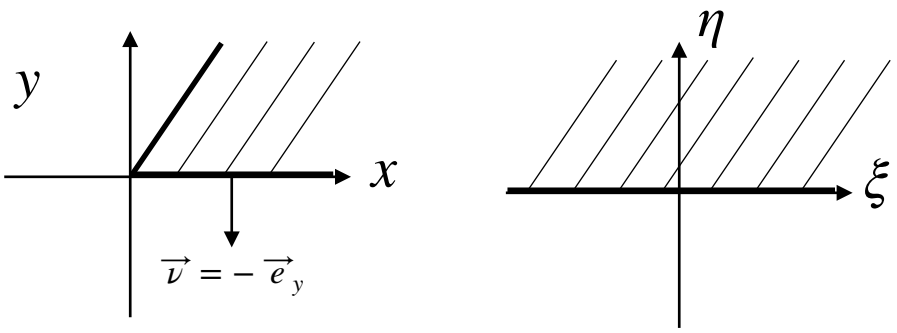
$$u\left(x_1^0,x_2^0\right)=\int_0^1\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{x_2^0+2k}{\left(x_1-x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2^0+2k\right)^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{-x_2^0+2k}{\left(x_1-x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2^0-2k\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\frac{-x_2^0+2k}{\left(x_1+x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2^0-2k\right)^2}-\frac{1}{2\pi}\frac{x_2^0+2k}{\left(x_1+x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2^0+2k\right)^2}\right)\varphi(x_1)dx_1.$$

Пример 3. Методом конформных преобразований построить функцию Грина задачи Дирихле в угле $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3} \right\}$. Получить формулу интегрального представления задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}, \\ u\big|_{\arg z = \frac{\pi}{3}} = 0, \\ u\big|_{\arg z = 0} = \varphi(x). \end{cases}$$

Решение.



$z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$, $w = z^3 \Rightarrow$

$$\mathcal{G}(z; z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - w(z_0)}{w(z) - \overline{w(z_0)}} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^3 - z_0^3}{z^3 - \bar{z}_0^3} \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \left| z^3 - z_0^3 \right|^2 - \frac{1}{4\pi} \ln \left| z^3 - \bar{z}_0^3 \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \left| x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 - x_0^3 - 3ix_0^2y_0 + 3x_0y_0^2 + iy_0^3 \right|^2 -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \ln \left| x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 - x_0^3 + 3ix_0^2y_0 + 3x_0y_0^2 - iy_0^3 \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \left((x^3 - x_0^3 - 3xy^2 + 3x_0y_0^2)^2 + (3x^2y - y^3 - 3x_0^2y_0 + y_0^3)^2 \right) -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \ln \left((x^3 - x_0^3 - 3xy^2 + 3x_0y_0^2)^2 + (3x^2y - y^3 + 3x_0^2y_0 - y_0^3)^2 \right).$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \overrightarrow{\nu}}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}\right|_{y=0},$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\frac{-12xy\left(x^3 - x_0^3 - 3xy^2 + 3x_0y_0^2\right) + 2\left(3x^2y - y^3 - 3x_0^2y_0 + y_0^3\right)\left(3x^2 - 3y^2\right)}{(x^3 - x_0^3 - 3xy^2 + 3x_0y_0^2)^2 + (3x^2y - y^3 - 3x_0^2y_0 + y_0^3)^2} -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{-12xy\left(x^3 - x_0^3 - 3xy^2 + 3x_0y_0^2\right) + 2\left(3x^2y - y^3 + 3x_0^2y_0 - y_0^3\right)\left(3x^2 - 3y^2\right)}{(x^3 - x_0^3 - 3xy^2 + 3x_0y_0^2)^2 + (3x^2y - y^3 + 3x_0^2y_0 - y_0^3)^2}.$$

$$u(x_0, y_0) = \int_0^\infty -\left.\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}\right|_{y=0} \varphi(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{3x^2\left(3x_0^2y_0 - y_0^3\right)}{(x^3 - x_0^3 + 3x_0y_0^2)^2 + (3x_0^2y_0 - y_0^3)^2}\varphi(x)dx.$$

Рекомендации к решению задания #1

- Метод конформных преобразований применяется только для двумерных краевых задач Дирихле, то есть когда на всей границе задано условие Дирихле; в случае трёхмерных задач и/или условия Неймана на части границы для построения функции Грина следует применять метод отражений.
- При отражении относительно плоской части границы с условием Дирихле знак заряда меняется на противоположный; при отражении относительно плоской части границы с условием Неймана — остаётся неизменным.
- При инверсии заряда относительно части границы, принадлежащей сфере (окружности), с условием Дирихле изменяется не только знак, но и аргумент фундаментального решения (см. пример 1.1).
- В методе конформных преобразований при получении интегральной формулы следует от комплексных переменных перейти к вещественным.