Задача Коши

Задача 4.1. Решить задачу Коши для двумерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + r^2 e^t, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = , \ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Задача 4.2. Решить задачу Коши для трёхмерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = xe^{-t}\cos(3y + 4z), t > 0, \\ u\big|_{t=0} = xy\cos z, \ u_t\big|_{t=0} = yze^x. \end{cases}$$

Задача 4.3. Показать, что классическое решение задачи Коши для трёхмерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \alpha(r), \ u_t\big|_{t=0} = \beta(r), \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, существует, если $\alpha \in C^3[0, +\infty)$, $\beta \in C^2[0, +\infty)$, $\alpha'(0) = 0$. Получить формулу для этого решения.

Задача 4.4. Сформулировать и доказать принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности.

Задача 4.5. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности по формуле Пуассона:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{4}u_{xx}, \ -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = e^{2x - x^2}. \end{cases}$$

Задача 4.6. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности с тремя пространственными переменными:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos(xy)\sin z. \end{cases}$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на странице курса. Чтобы получить зачёт за четвёртое общее дом. задание, необходимо правильно решить любые **три задачи** из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2025/26 уч.г.**

Ресурсы для решения общего дом. задания #4

1. *Материалы* к практическим занятиям по теме «Задача Коши».
2. Конспекты лекционной темы #6 «Задача Коши».
3. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.
5. В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.