Тема 1 «Функция Грина». Часть 2: метод конформных преобразований

Из метода отражений следует, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в верхней полуплоскости $H = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ имеет вид

$$G(w, w_0) = \frac{1}{2\pi} \ln|w - w_0| - \frac{1}{2\pi} \ln|w - \overline{w}_0| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w - w_0}{w - \overline{w}_0} \right|.$$

По определению она удовлетворяет $\forall w_0 \in H$ задаче

$$\begin{cases} \Delta_w G(w, w_0) = \delta(w - w_0) \text{ в } \operatorname{Im} w > 0, \\ G(w, w_0) = 0 \text{ на } \operatorname{Im} w = 0. \end{cases}$$

Кроме того, для каждой $w_0 \in H$ функция $G = G(w, w_0)$ имеет нулевой предел при $w \to \infty$.

Сделаем некоторое конформное преобразование $w = w(z)$, $z \in \Omega$, осуществляющее конформный изоморфизм первого рода односвязной области Ω и верхней полуплоскости H.

$w : \Omega \to H$ — голоморфная функция, $w' \neq 0$ в Ω,

$\exists w^{-1} : H \to \Omega$ — тоже голоморфная функция.

$z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$,

$\Delta_w u = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$. Какому уравнению удовлетворяет функция u в переменных x, y?

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{aligned} \quad (1)$$

Условия Коши—Римана: $\xi_x = \eta_y$, $\eta_x = -\xi_y$. Кроме того, $\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0$, $\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0$,

$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \xi_x^2 + \xi_y^2 = |w'(z)|^2 \neq 0$. Сложим два равенства в формуле (1):

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi}\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) + 2u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y\right) + u_{\eta\eta}\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) +$$

$$+u_\xi\left(\xi_{xx} + \xi_{yy}\right) + u_\eta\left(\eta_{xx} + \eta_{yy}\right) = u_{\xi\xi}\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) + u_{\eta\eta}\left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) =$$

$$= \left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\right) = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$$ Следовательно, конформные изоморфизмы первого рода — это симметрии уравнения Лапласа, то есть при таких заменах уравнение Лапласа остаётся инвариантным.

Мы также узнали, как преобразуется оператор Лапласа при конформных изоморфизмах первого рода:

$$\Delta_z u = u_{xx} + u_{yy} = \left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right)\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\right) = |w'(z)|^2 \Delta_w u.$$

Обозначим $\mathcal{G}(z, z_0) = G\left(w(z), w(z_0)\right)$. Определение функции Грина задачи Дирихле в области Ω: $\forall z_0 \in \Omega$

$$\begin{cases} \Delta_z \mathcal{G}(z, z_0) = \delta(z - z_0) \text{ в } \Omega, \\ \mathcal{G}(z, z_0) = 0 \text{ при } z \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $\mathcal{G} = \mathcal{G}(z, z_0)$ удовлетворяет для любой $z_0 \in \Omega$ уравнению

$$\Delta_z \mathcal{G}(z, z_0) = |w'(z)|^2 \Delta_w G(w(z), w(z_0)) = |w'(z)|^2 \delta(w(z) - w(z_0)) =$$

$$= \frac{|w'(z)|^2}{|w'(z)|^2}\delta(z - z_0) = \delta(z - z_0)$$ при $z \in \Omega$ и краевому условию $\mathcal{G}(z, z_0) = 0$, если $z \in \partial\Omega$.

Следовательно, по определению,

$$\mathcal{G}(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{w(z) - w(z_0)}{w(z) - \overline{w(z_0)}}\right|$$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в односвязной области Ω, где $w : \Omega \to H$ — конформный изоморфизм первого рода, допускающий продолжение до гомеоморфизма $w : \overline{\Omega} \to \overline{H}$.

Задача 1.6. Методом конформных преобразований построить функцию Грина задачи Дирихле в стандартном диске $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Решение. Из примера 4.1

$$\mathcal{G}(x, x^0) = \mathcal{E}(|x - x^0|) - \mathcal{E}\left(\frac{|x^0|}{R}|x - x^1|\right) =$$

$= \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^0| - \frac{1}{2\pi}\ln\left(|x^0||x - x^1|\right)$. В терминах комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$, $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$, $z_1 = x_1^1 + ix_2^1$:

$\mathcal{G}(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln|z - z_0| - \frac{1}{2\pi}\ln\left(|z_0||z - z_1|\right)$, где z_1 — результат инверсии точки z_0 относительно стандартной окружности ∂D: $z_1 = \frac{1}{\overline{z}_0}$. Продолжаем:

$$\mathcal{G}(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z - z_0}{z_0\left(z - \frac{1}{\overline{z}_0}\right)}\right| = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z - z_0}{z_0 z - \frac{z_0}{\overline{z}_0}}\right| = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\overline{z}_0 z - |z_0|^2}{|z_0|^2 z - z_0}\right|.$$

Построим конформный изоморфизм диска и верхней полуплоскости, то есть отобразим D в H. Найдём обратное отображение: $z = \frac{w - i}{w + i} \Rightarrow zw + iz = w - i \Rightarrow w = \frac{-iz - i}{z - 1} =$

$= \frac{i + iz}{1 - z}$. Тогда

$$\mathcal{G}(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{w(z) - w(z_0)}{w(z) - \overline{w(z_0)}}\right| = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\frac{iz + i}{1 - z} - \frac{iz_0 + i}{1 - z_0}}{\frac{iz + i}{1 - z} - \frac{-i - i\overline{z}_0}{1 - \overline{z}_0}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{(iz + i)(1 - z_0) - (iz_0 + i)(1 - z)}{(1 - z)(1 - z_0)} \cdot \frac{(1 - z)(1 - \overline{z}_0)}{(iz + i)(1 - \overline{z}_0) + (i + i\overline{z}_0)(1 - z)}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\left(\left|\frac{(iz + i)(1 - z_0) - (iz_0 + i)(1 - z)}{(iz + i)(1 - \overline{z}_0) + (i + i\overline{z}_0)(1 - z)}\right| \cdot \left|\frac{1 - \overline{z}_0}{1 - z_0}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z+1)(1-z_0)-(z_0+1)(1-z)}{(z+1)(1-\overline{z}_0)+(1+\overline{z}_0)(1-z)} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z+z-zz_0-z_0-z_0+zz_0}{1+1-z\overline{z}_0-z\overline{z}_0} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z_0^2-zz_0}{|\overline{z}_0|^2 z-z_0} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\overline{z}_0 z-|z_0|^2}{|z_0|^2 z-z_0} \right|.$$

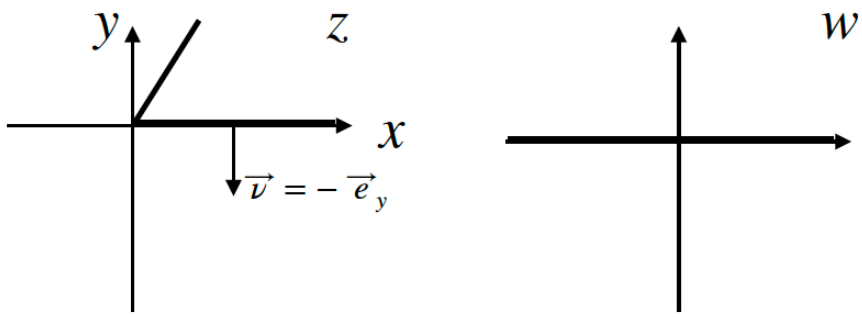
$$\left| z_0^2-zz_0 \right| = \left| \overline{z}_0 z-|z_0|^2 \right| \Leftrightarrow |z_0| \left| z_0-z \right| = |\overline{z}_0| \left| z-z_0 \right| \Leftrightarrow$$

$\left| z_0-z \right| = \left| z-z_0 \right|$. Итак, $\mathcal{G}(z,z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0} \right|$ —

функция Грина задачи Дирихле в стандартном диске.

Задача 1.7. Методом конформных преобразований построить функцию Грина задачи Дирихле в секторе плоскости $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3} \right\}$ и получить интегральную формулу, представляющую решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}, \\ u\big|_{\arg z = \frac{\pi}{3}} = 0, \\ u\big|_{\arg z = 0} = \varphi(x). \end{cases}$$



$$z = x+iy,\ z_0 = x_0+iy_0, \quad \overline{z}_0 = x_0-iy_0,\ w = z^3,$$

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < 3\arg z < \pi \Leftrightarrow 0 < \arg z^3 = \arg w < \pi.$$

Имеем $\mathcal{G}(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{w(z)-w(z_0)}{w(z)-\overline{w(z_0)}}\right|=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^3-z_0^3}{z^3-\overline{z}_0^3}\right|=$

$=\frac{1}{4\pi}\ln\left|z^3-z_0^3\right|^2-\frac{1}{4\pi}\ln\left|z^3-\overline{z}_0^3\right|^2=$

$=\frac{1}{4\pi}\ln\left|x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3-x_0^3-3ix_0^2y_0+3x_0y_0^2+iy_0^3\right|^2-$

$-\frac{1}{4\pi}\ln\left|x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3-x_0^3+3ix_0^2y_0+3x_0y_0^2-iy_0^3\right|^2=$

$=\frac{1}{4\pi}\ln\left((x^3-x_0^3-3xy^2+3x_0y_0^2)^2+(3x^2y-y^3-3x_0^2y_0+y_0^3)^2\right)-$

$-\frac{1}{4\pi}\ln\left((x^3-x_0^3-3xy^2+3x_0y_0^2)^2+(3x^2y-y^3+3x_0^2y_0-y_0^3)^2\right).$

$\left.\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\vec{\nu}}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}\right|_{y=0},$

$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}=\frac{1}{4\pi}\frac{-12xy\left(x^3-x_0^3-3xy^2+3x_0y_0^2\right)+2\left(3x^2y-y^3-3x_0^2y_0+y_0^3\right)\left(3x^2-3y^2\right)}{(x^3-x_0^3-3xy^2+3x_0y_0^2)^2+(3x^2y-y^3-3x_0^2y_0+y_0^3)^2}-$

$-\frac{1}{4\pi}\frac{-12xy\left(x^3-x_0^3-3xy^2+3x_0y_0^2\right)+2\left(3x^2y-y^3+3x_0^2y_0-y_0^3\right)\left(3x^2-3y^2\right)}{(x^3-x_0^3-3xy^2+3x_0y_0^2)^2+(3x^2y-y^3+3x_0^2y_0-y_0^3)^2}$

$u(x_0,y_0)=\int_0^\infty-\left.\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}\right|_{y=0}\varphi(x)dx=\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\frac{3x^2\left(3x_0^2y_0-y_0^3\right)}{(x^3-x_0^3+3x_0y_0^2)^2+(3x_0^2y_0-y_0^3)^2}\varphi(x)dx.$