# Тема 1 «Функция Грина». Часть 1: метод отражений

**Задача 1.1.** Пусть $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ — шар радиуса $R$ в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Требуется: 1) построить функцию Грина задачи Дирихле в шаре; 2) получить интегральную формулу, решающую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

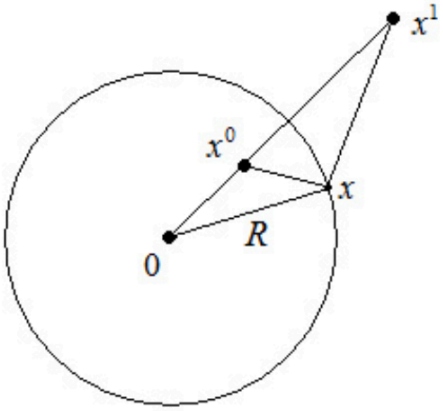
Пусть $B_R \ni x^0 \neq 0$. Будем искать функцию Грина в следующем виде

$$G(x; x^0) = \mathscr{E}(|x - x^0|) - \mathscr{E}\left(\frac{|x^0|}{R}|x - x^1|\right).$$

Здесь $x^1$ лежит вне шара $B_R$ на луче из $O$, проходящем через $x^0 \neq 0$, $\mathscr{E}(r) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ при $n = 2$ и $\mathscr{E}(r) = \frac{-1}{(n-2)\omega_{n-1}} r^{2-n}$ при $n > 2$, в частности, $\mathscr{E}_3(r) = -\frac{1}{4\pi r}$.

$g(x, x^0) = -\mathscr{E}\left(\frac{|x^0|}{R}|x - x^1|\right)$ — гармоническая функция относительно $x$ при $x \neq x^1$, так как она получена из фундаментального решения конформным преобразованием второго рода — *инверсией*: $x^1 = \frac{R^2}{|x^0|^2}x^0$. Точки $x^0$ и $x^1$, лежащие на одном луче из центра сферы, называются *симметричными* относительно сферы $S_R$, если $|x^0||x^1| = R^2$.

Для $x \in S_R$ треугольники $x^0Ox$ и $xOx^1$ подобны, если точки $x^0$ и $x^1$ симметричны (по первому признаку подобия). Из подобия следует, что




$$\frac{|x^0|}{R} = \frac{R}{|x^1|} = \frac{|x-x^0|}{|x-x^1|} \Rightarrow$$

$\frac{|x^0|}{R}|x-x^1| = |x-x^0|$. Поэтому, когда $x \in S_R$, имеем

$$G(x;x^0) = \mathscr{E}(|x-x^0|) - \mathscr{E}\left(\frac{|x^0|}{R}|x-x^1|\right) = 0.$$

Покажем, что при $x^0 \to 0$ функция Грина имеет конечный предел, если $x \neq 0$. Имеем

$$G(x;x^0) = \mathscr{E}_2(|x-x^0|) - \mathscr{E}_2\left(\frac{|x^0|}{R}|x-x^1|\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln|x-x^0| - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x^0|}{R}|x-x^1| = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|x-x^0|}{|x^0||x-x^1|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|x-x^0|}{|x^0|\left|x-\frac{R^2}{|x^0|^2}x^0\right|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|x-x^0|}{|x^0|\frac{1}{|x^0|}\left||x^0|x-\frac{R^2}{|x^0|}x^0\right|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|x-x^0|}{\left||x^0|x-\frac{R^2}{|x^0|}x^0\right|} \to \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|x|}{R^2\frac{|x^0|}{|x^0|}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x|}{R}, x^0 \to 0.$$

Для гармонической в шаре $B_R$ функции $u \in C^2\left(\overline{B}_R\right)$, такой, что $u\big|_{S_R} = \varphi \in C^2(S_R)$, имеем $u(x^0) = \int\limits_{S_R} \frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{\nu}_x}(x;x^0)\varphi(x)ds_x$.

Оказывается, верно более сильное утверждение.

**Теорема.** Пусть $\varphi \in C\left(S_R\right)$. Тогда формула

$$u(x^0) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{\omega_{n-1} R} \int\limits_{S_R} \frac{\varphi(x) ds_x}{|x - x^0|^n} \Leftrightarrow$$

$$u(x^0) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{\omega_{n-1} R} \int\limits_{S_R} \frac{\varphi(x) ds_x}{\left(R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma\right)^{n/2}}, \quad (4)$$

где $\gamma$ — угол между $x$ и $x^0$, даёт единственное классическое решение $u \in C^2\left(B_R\right) \cap C\left(\overline{B}_R\right)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $B_R$.

Формула (4) называется *формулой (интегралом) Пуассона*.

Получим её в 2D. Для этого, во-первых, заметим, что нормальная производная $\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{\nu}_x}(x; x^0)$ есть производная по полярному радиусу $|x| = r$. $n = 2 \Rightarrow x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$,

$$x_1^1 = \frac{R^2}{|x^0|^2} x_1^0, x_2^1 = \frac{R^2}{|x^0|^2} x_2^0,$$

$$|x - x^0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} = \sqrt{(r\cos\theta - x_1^0)^2 + (r\sin\theta - x_2^0)^2}.$$

Формула Пуассона при $n = 2$ имеет вид

$u\left(x^0\right) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{2\pi R} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta)}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma} R d\theta$. Пусть

$x_1^0 = |x^0|\cos\psi, x_2^0 = |x^0|\sin\psi, \gamma = \psi - \theta$, тогда

$$|x - x^0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} = \sqrt{(r\cos\theta - x_1^0)^2 + (r\sin\theta - x_2^0)^2}.$$

$$G(x; x^0) = \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^0| - \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{|x^0|}{R}\right) - \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^1|,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{\nu}_x}(x; x^0)\Big|_{|x|=R} = \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=|x|=R} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2(r\cos\theta - x_1^0)\cos\theta + 2(r\sin\theta - x_2^0)\sin\theta}{2|x - x^0|^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(r\cos\theta - x_1^1)\cos\theta + 2(r\sin\theta - x_2^1)\sin\theta}{2|x - x^1|^2}\right)\Bigg|_{r=R} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{r - x_1^0\cos\theta - x_2^0\sin\theta}{|x - x^0|^2} - \right.$$

$$-\frac{\frac{|x^0|^2}{R^2}(r\cos\theta - x_1^1)\cos\theta + \frac{|x^0|^2}{R^2}(r\sin\theta - x_2^1)\sin\theta}{|x-x^0|^2}\Bigg)\Bigg|_{r=R} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{r - x_1^0\cos\theta - x_2^0\sin\theta}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma} - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{|x^0|^2}{R^2}(r - x_1^1\cos\theta - x_2^1\sin\theta)}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma}\right)\Bigg|_{r=R} =$$

$$= \frac{1}{2\pi R^2}\frac{R^2\left(r - x_1^0\cos\theta - x_2^0\sin\theta\right) - |x^0|^2\left(r - x_1^1\cos\theta - x_2^1\sin\theta\right)}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma}\Bigg|_{r=R} =$$

$$= \frac{R^2 - |x^0|^2}{2\pi R}\frac{1}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma}.$$

1) $\dfrac{|x^0|}{R}|x - x^1| = |x - x^0| \Rightarrow |x - x^1|^2 = \dfrac{R^2}{|x^0|^2}|x - x^0|^2.$

2) По теореме косинусов для треугольника $x^0Ox$
$|x - x^0|^2 = R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma,\ \gamma = \angle O.$

Формула Пуассона при $n = 2$ имеет вид

$u\left(x^0\right) = \dfrac{R^2 - |x^0|^2}{2\pi R}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\theta)}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma}Rd\theta$. Пусть

$x_1^0 = |x^0|\cos\psi,\ x_2^0 = |x^0|\sin\psi,\ \gamma = \psi - \theta$, тогда

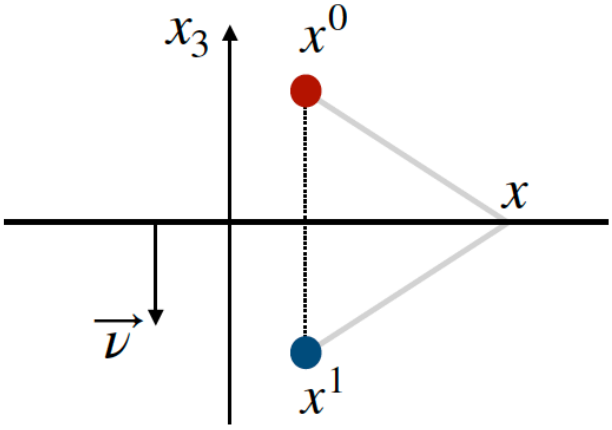
$$u\left(|x^0|,\psi\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(R^2 - |x^0|^2\right)\varphi(\theta)}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos(\psi - \theta)}d\theta.$$

**Задача 1.2.** Рассмотрим краевую задачу ($n = 3$):

$$\begin{cases}\Delta u = 0, x_3 > 0,\\ u\big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right), u \to 0, x_3 \to +\infty\end{cases}$$

($u \to 0$ при $x_3 \to +\infty$ поточечно, т.е. $\lim\limits_{x_3 \to +\infty} u\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0$ для каждых $\left(x_1, x_2\right)^{\top} \in \mathbb{R}^2$). Определить и построить функцию Грина, получить формулу интегрального представления.

**Решение.**




Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, $\vec{\nu} = -\vec{e}_3$.
Функция Грина $G = G(x, x^0)$, $x, x^0 \in \overline{\Omega}$, $x \neq x^0$, удовлетворяет для любой $x^0 \in \Omega$

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x - x^0), x_3 > 0, \\ G\big|_{x_3=0} = 0, \\ G \to 0, x_3 \to +\infty . \end{cases}$$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T \in \Omega$, $x^1 = (x_1^0, x_2^0, -x_3^0)^T$ — точка, симметричная точке $x^0$ относительно плоскости $Ox_1x_2$.
Проверим, что $G(x^0, x) = \mathscr{E}\left(|x - x^0|\right) - \mathscr{E}\left(|x - x^1|\right) =$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^0|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^1|}$$ — функция Грина.

1) $$\Delta G(x^0, x) = \Delta\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^0|}\right) - \Delta\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^1|}\right) =$$

$$= \delta(x - x^0) - \delta(x - x^1) = \delta(x - x^0), x \in \Omega;$$

2) $$G(x^0, x)\Big|_{x_3=0} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^0|}\Bigg|_{x_3=0} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^1|}\Bigg|_{x_3=0} = 0,$$

потому что $|x-x^0|\Big|_{x_3=0} = |x-x^1|\Big|_{x_3=0}$;

3) очевидно, что $|x-x^0| \to \infty$, $|x-x^1| \to \infty$, если $x_3 \to +\infty \Rightarrow G(x,x^0) \to 0$ при $x_3 \to +\infty$.

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{\nu}_x}(x;x^0)\varphi(x)ds_x = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} -\frac{\partial G}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Имеем $\dfrac{\partial G}{\partial x_3} = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\dfrac{1}{|x-x^0|} + \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\dfrac{1}{|x-x^1|} =$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x^0|^2}\frac{2(x_3-x_3^0)}{2|x-x^0|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x^1|^2}\frac{2(x_3-x_3^1)}{2|x-x^1|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{x_3-x_3^0}{|x-x^0|^3} - \frac{1}{4\pi}\frac{x_3-x_3^1}{|x-x^1|^3};$$

$$-\frac{\partial G}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = \frac{1}{4\pi}\frac{x_3^0-x_3^1}{|x-x^0|^3_{x_3=0}} = \frac{1}{4\pi}\frac{2x_3^0}{|x-x^0|^3_{x_3=0}}.$$

Итак,

$$u(x^0) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi}\frac{x_3^0\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2}{\left((x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3^0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

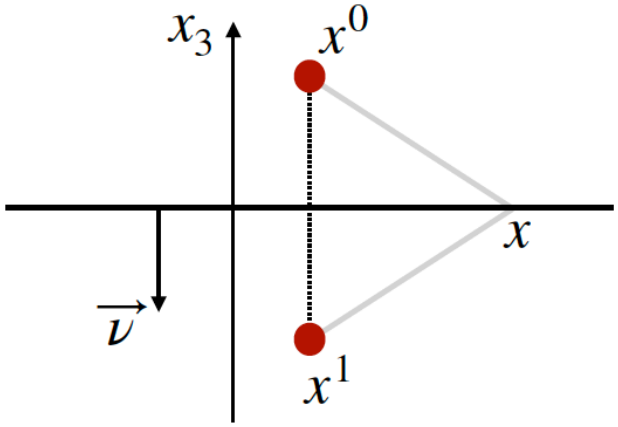
**Замечание.** Если $\varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^2\right)$, то классическое решение краевой задачи существует, единственно и выражается формулой выше.

**Задача 1.3.** Рассмотрим краевую задачу Неймана ($n=3$):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x_3 > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{x_3=0} = -u_{x_3}\Big|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1,x_2\right), \\ u \to 0, x_3 \to +\infty\,. \end{cases}$$

Определить и построить функцию Грина задачи Неймана, получить формулу интегрального представления.

**Решение.**




Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, $\vec{\nu} = -\vec{e}_3$.
Функция Грина $G = G(x, x^0)$ задачи Неймана удовлетворяет для любой $x^0 \in \Omega$ задаче вида

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x - x^0), x_3 > 0, \\ -G_{x_3}\Big|_{x_3=0} = 0, \\ G \to 0, x_3 \to +\infty. \end{cases}$$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T$, $x^1 = (x_1^0, x_2^0, -x_3^0)^T$ — точка, симметричная точке $x^0$ относительно плоскости $Ox_1x_2$.

Проверим, что $G(x^0, x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^0|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^1|}$ — функция Грина задачи Неймана.

1) $\Delta G(x^0, x) = \Delta\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^0|}\right) + \Delta\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - x^1|}\right) =$

$= \delta(x - x^0)$.

Найдём $\frac{\partial G}{\partial x_3}$: $\frac{\partial G}{\partial x_3} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|x - x^0|} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|x - x^1|} =$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x^0|^2}\frac{2(x_3-x_3^0)}{2|x-x^0|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x^1|^2}\frac{2(x_3-x_3^1)}{2|x-x^1|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{x_3-x_3^0}{|x-x^0|^3} + \frac{1}{4\pi}\frac{x_3-x_3^1}{|x-x^1|^3}.$$

2) $$-\frac{\partial G}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = -\frac{1}{4\pi}\frac{x_3-x_3^0}{|x-x^0|^3} - \frac{1}{4\pi}\frac{x_3-x_3^1}{|x-x^1|^3}\Big|_{x_3=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2x_3-x_3^0-x_3^1\big|_{x_3=0}}{|x-x^0|^3} = 0.$$

3) Очевидно, что $|x-x^0| \to \infty$, $|x-x^1| \to \infty$, если $x_3 \to +\infty \Rightarrow G(x,x^0) \to 0$ при $x_3 \to +\infty$.

Формула интегрального представления решения задачи Неймана для уравнения Лапласа имеет вид

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} -G(x,x^0)\varphi(x)ds_x = \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x^0|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-x^1|}\right)\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

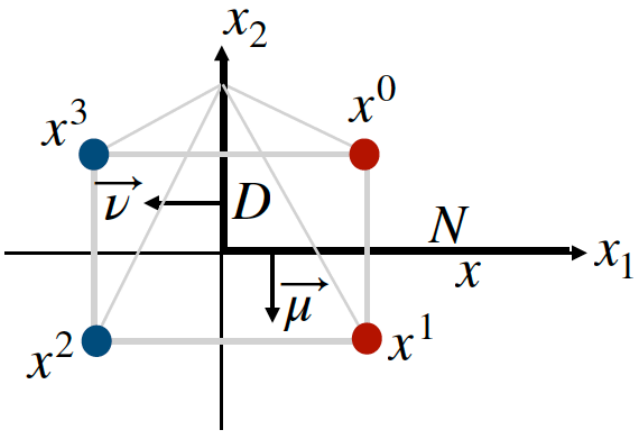
$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x-x^0|}\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}\frac{\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2}{\left((x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3^0)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

**Задача 1.4.** Рассмотрим краевую задачу ($n=2$):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, \\ u\big|_{x_1=0} = \varphi(x_2),\ -u_{x_2}\Big|_{x_2=0} = 0. \end{cases}$$

Определить и построить функцию Грина, получить формулу интегрального представления.

**Решение.**




Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $\vec{\nu} = -\vec{e}_1$, $\vec{\mu} = -\vec{e}_2$,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{\nu}}\right|_{x_1=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}, \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\mu}}\right|_{x_2=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0.$$

Функция Грина $G = G(x, x^0)$ задачи со смешанными краевыми условиями удовлетворяет для любой $x^0 \in \Omega$ задаче

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x - x^0), x \in \Omega, \\ -G_{x_2}\Big|_{x_2=0} = 0,\ G\Big|_{x_1=0} = 0, \\ G(\cdot, x^0) \in C_b\left(\mathbb{R}^2\right). \end{cases}$$

$x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)^T$, $x^1 = \left(x_1^0, -x_2^0\right)^T$, $x^3 = \left(-x_1^0, x_2^0\right)^T$,
$x^2 = \left(-x_1^0, -x_2^0\right)^T$.

Функция Грина имеет вид

$$G\left(x, x^0\right) = E\left(x - x^0\right) + E\left(x - x^1\right) - E\left(x - x^2\right) - E\left(x - x^3\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^0| + \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^1| - \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^2| - \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^3| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x - x^0||x - x^1|}{|x - x^2||x - x^3|}.$$

1) Проверим условие Дирихле: $x_1 = 0 \Rightarrow |x - x^0| = |x - x^3|$, $|x - x^1| = |x - x^2| \Rightarrow G\Big|_{x_1=0} = 0.$

2) Проверим условие Неймана:

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\left( \frac{x_2 - x_2^0}{|x - x^0|^2} + \frac{x_2 - x_2^1}{|x - x^1|^2} - \frac{x_2 - x_2^2}{|x - x^2|^2} - \frac{x_2 - x_2^3}{|x - x^3|^2} \right);$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow |x - x^0| = |x - x^1|,\ |x - x^2| = |x - x^3| \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial G}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{-x_2^0 + x_2^0}{|x - x^0|^2} - \frac{1}{2\pi}\frac{x_2^0 - x_2^0}{|x - x^2|^2} = 0.$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\left( \frac{2(x_1 - x_1^0)}{2|x - x^0|^2} + \frac{2(x_1 - x_1^1)}{2|x - x^1|^2} - \frac{2(x_1 - x_1^2)}{2|x - x^2|^2} - \frac{2(x_1 - x_1^3)}{2|x - x^3|^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left( \frac{x_1 - x_1^0}{|x - x^0|^2} + \frac{x_1 - x_1^0}{|x - x^1|^2} - \frac{x_1 + x_1^0}{|x - x^2|^2} - \frac{x_1 + x_1^0}{|x - x^3|^2} \right).$$

$$-\frac{\partial G}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{|x - x^0|^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{|x - x^1|^2}\bigg|_{x_1=0} =$$

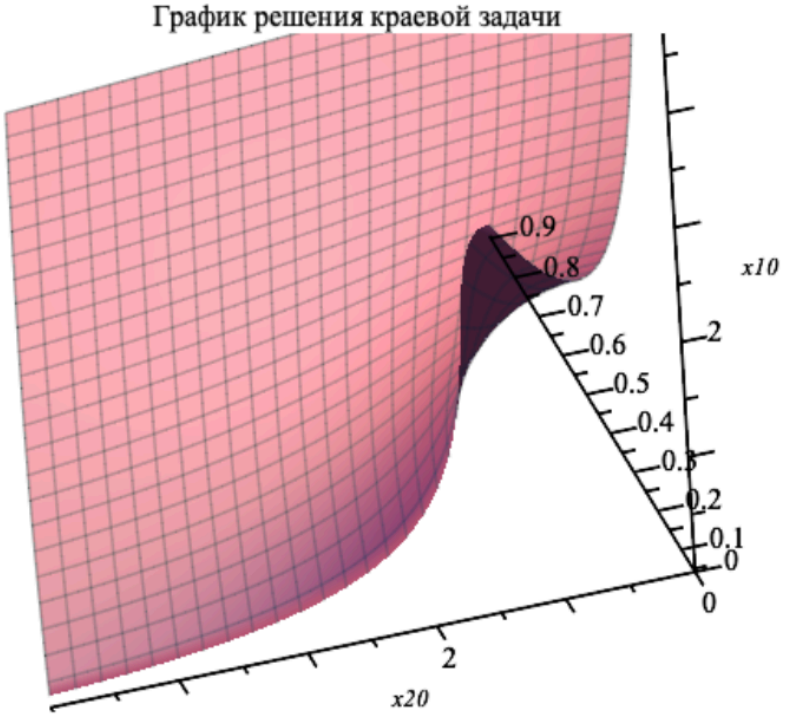
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 + x_2^0)^2} \Rightarrow$$

$$u(x^0) = \int\limits_{x_1=0} \frac{\partial G}{\partial \vec{\nu}}\bigg|_{x_1=0} \varphi(x)\,ds_x \Rightarrow$$

$$u\left(x_1^0, x_2^0\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \left( \frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + \frac{2x_1^0}{(x_1^0)^2 + (x_2 + x_2^0)^2} \right) \varphi(x_2)\,dx_2.$$

**Замечание.** Если $\varphi \in C_b[0, +\infty)$, то классическое решение краевой задачи существует, единственно и выражается формулой выше.

Пусть $\varphi(x_2) \equiv 1$, тогда, очевидно, $u\left(x_1^0, x_2^0\right) \equiv 1$. Рассмотрим другую граничную функцию: $\varphi(x_2) = \dfrac{1}{1 + x_2^2}$. Найдём решение и построим его график в среде MAPLE 2022.

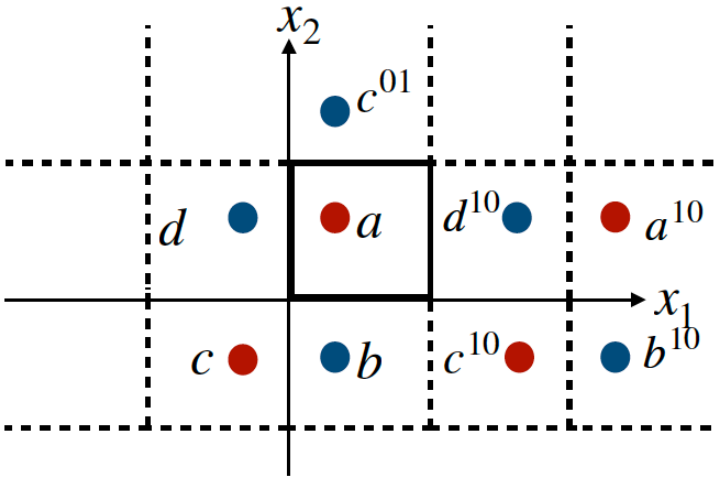



**Задача 1.5.** Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате ($n = 2$):

$$\begin{cases} \Delta u = f\left(x_1, x_2\right), 0 < x_1, x_2 < 1, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Методом отражений построить функцию Грина и получить интегральную формулу.

**Решение.**



Рассмотрим два семейства прямых: горизонтальные прямые $x_2 = \beta, \beta \in \mathbb{Z}$; вертикальные прямые $x_1 = \alpha, \alpha \in \mathbb{Z}$. Квадрат $Q_{00} = (-1,1) \times (-1,1)$ назовём *основным*. В этом квадрате есть четыре ‘заряда’ в точках $a = \left(x_1^0, x_2^0\right)^T$, $b = \left(x_1^0, -x_2^0\right)^T$, $c = \left(-x_1^0, -x_2^0\right)^T$, $d = \left(-x_1^0, x_2^0\right)^T$.

Рассмотрим также квадраты $Q_{jk} = (-1+2j,1+2j) \times (-1+2k,1+2k)$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$. Они дают замощение всей плоскости. В каждом таком квадрате рассмотрим точки

$a^{jk} = \left(x_1^0 + 2j, x_2^0 + 2k\right)^T$, $b^{jk} = \left(x_1^0 + 2j, -x_2^0 + 2k\right)^T$,

$c^{jk} = \left(-x_1^0 + 2j, -x_2^0 + 2k\right)^T$, $d^{jk} = \left(-x_1^0 + 2j, x_2^0 + 2k\right)^T$

и поместим в них условные ‘заряды’ соответствующих знаков (положительные ‘заряды’ поместим в точки $a^{jk}$ и $c^{jk}$; отрицательные — в точки $b^{jk}$ и $d^{jk}$).

$$G_{jk}(x,x^0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|x-a^{jk}\right| - \frac{1}{2\pi}\ln\left|x-b^{jk}\right| + \frac{1}{2\pi}\ln\left|x-c^{jk}\right| -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\ln\left|x-d^{jk}\right| = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left|x-a^{jk}\right|\left|x-c^{jk}\right|}{\left|x-b^{jk}\right|\left|x-d^{jk}\right|}.$$

Функция Грина задачи Дирихле в квадрате имеет вид

$$G(x,x^0) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} G_{jk}(x,x^0) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{32\pi}\ln\frac{\left|x-a^{jk}\right|^2\left|x-c^{jk}\right|^2}{\left|x-b^{jk}\right|^2\left|x-d^{jk}\right|^2} =$$

$$= \frac{1}{32\pi}\ln\prod_{j,k=-\infty}^{\infty}\frac{\left|x-a^{jk}\right|^2\left|x-c^{jk}\right|^2}{\left|x-b^{jk}\right|^2\left|x-d^{jk}\right|^2} = \frac{1}{32\pi}\ln\prod_{j,k=-\infty}^{\infty}\frac{\left(x_1-x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2-x_2^0-2k\right)^2}{\left(x_1-x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2+x_2^0-2k\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(x_1+x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2+x_2^0-2k\right)^2}{\left(x_1+x_1^0-2j\right)^2+\left(x_2-x_2^0-2k\right)^2}$$ (сходимость в смысле главного значения).

Однако, функцию Грина задачи Дирихле в квадрате можно представить в более простом виде… Формула интегрального представления решения задачи Дирихле в квадрате имеет ужасающий вид

$$u(x_0^1, x_0^2) = \iint\limits_{\Omega} \frac{1}{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\left(x_1 - x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0 - 2k\right)^2}{\left(x_1 - x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 + x_2^0 - 2k\right)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(x_1 + x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 + x_2^0 - 2k\right)^2}{\left(x_1 + x_1^0 - 2j\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0 - 2k\right)^2}.$$ Следует искать альтернативные методы решения задачи Дирихле в квадрате…