ИНД. ЗАДАНИЯ

по «Уравнениям в частных производных»

Тема 3 «Вариационный метод решения краевых задач»

Пусть $\Omega = (0,L) \times (0,L)$ — квадрат. Рассматривается уравнение $\mathscr{L}u = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, где $\mathscr{L}$ — дивергентный равномерно эллиптический в $\overline{\Omega}$ оператор второго порядка. На границе $\partial\Omega$ рассматривается комбинация условий Дирихле / Неймана / Робена. Предлагается найти приближённое решение краевой задачи вариационным методом. Для этого:

1) определить энергетическое пространство H как некоторое замкнутое подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и ввести функционал энергии $E = E(u)$, $u \in H$;
2) варьируя функционал энергии $E = E(u)$, убедиться в том, что $\mathscr{L}u = f(x,y)$ — действительно его уравнение Эйлера-Лагранжа, краевые условия для которого есть заданные краевые условия;
3) в энергетическом пространстве H выбрать тригонометрический или полиномиальный базис в зависимости от вычислительных преимуществ;
4) получить общую схему Ритца построения минимизирующей последовательности для экстремали $\operatorname{argmin}_{u \in H} E(u)$;
5) для указанных правых частей в одной из компьютерных математических сред найти приближение Ритца $U_{4,4}(x,y)$ для первых $4 \times 4 = 16$ базисных функций;
6) в той же математической среде визуализировать приближение Ритца, т.е. построить двумерную поверхность — график $U_{4,4}(x,y)$.

Пример. $f(x,y)=1,\ \varphi(x)=x,\ L=1.$

$$\begin{cases} \left(1+x^2y\right)(u_{xx}+u_{yy})+x^2u_y+2xyu_x=-f(x,y),\ (x,y)\in\Omega, \\ u\big|_{x=0}=0, \\ u_x\big|_{x=L}=0, \\ -u_y+u\big|_{y=0}=0 \ \Leftrightarrow\ u_y\big|_{y=0}=u\big|_{y=0}, \\ u_y\big|_{y=L}=\varphi(x)\,. \end{cases} \tag{1}$$

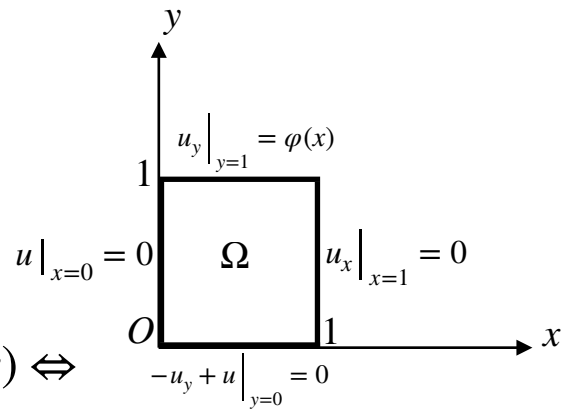
Преобразуем уравнение:

$$-\left(1+x^2y\right)(u_{xx}+u_{yy})-$$

$$-x^2u_y-2xyu_x=f(x,y)\ \Leftrightarrow$$

$$-u_{xx}-u_{yy}-x^2yu_{xx}-$$

$$-2xyu_x-x^2yu_{yy}-x^2u_y=f(x,y)\ \Leftrightarrow$$



$$-\operatorname{div}\left((1+x^2y)\nabla u\right)\equiv-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+x^2y\right)u_x\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+x^2y\right)u_y\right)=f(x,y)\,.$$

Таким образом,

$$\mathscr{L}u=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+x^2y\right)u_x\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+x^2y\right)u_y\right)-$$

дивергентный равномерно эллиптический в $\overline{\Omega}$ оператор второго порядка.

1) Определим энергетическое пространство H — замкнутое подпространство в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$, введём в рассмотрение на нём функционал энергии $E=E(u)$, $u\in H$.

Как выбрать энергетическое пространство? Ответ: $H=\left\{u\in H^1(\Omega)\,:\,\text{условия Дирихле}\right\}$. В нашем случае

$$H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u\big|_{x=0} = 0 \right\}.$$

Чтобы получить функционал энергии, необходимо прежде всего записать определение обобщённого решения краевой задачи. Для этого предположим, что $u \in H^2(\Omega)$ — её сильное решение. Пусть $v \in H^1(\Omega)$ — пробная функция. Умножим уравнение на пробную функцию и проинтегрируем по Ω: $\iint_\Omega v\mathscr{L}u\,dxdy = \iint_\Omega f(x,y)v\,dxdy$. Применим формулу интегрирования по частям для интеграла в левой части этого равенства: $\iint_\Omega v\mathscr{L}u\,dxdy = -\iint_\Omega v\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+x^2y\right)u_x\right)dxdy -$

$$-\iint_\Omega v\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+x^2y\right)u_y\right)dxdy = \iint_\Omega \left(1+x^2y\right)(u_xv_x+u_yv_y)dxdy -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left(1+x^2y\right)u_xv\Big|_{\partial\Omega}\nu_x ds - \int\limits_{\partial\Omega}\left(1+x^2y\right)u_yv\Big|_{\partial\Omega}\nu_y ds =$$

$$= \iint_\Omega \left(1+x^2y\right)(u_xv_x+u_yv_y)dxdy - \int\limits_0^1\left(1+x^2y\right)u_xv\Big|_{x=0}(-1)dy -$$

$$-\int\limits_0^1\left(1+x^2y\right)u_xv\Big|_{x=1}dy - \int\limits_0^1\left(1+x^2y\right)u_yv\Big|_{y=0}(-1)dx - \int\limits_0^1\left(1+x^2y\right)u_yv\Big|_{y=1}1dx =$$

$$= \iint_\Omega \left(1+x^2y\right)(u_xv_x+u_yv_y)dxdy + \int\limits_0^1 u_x\Big|_{x=0}v\big|_{x=0}dy - \int\limits_0^1\left(1+y\right)u_x\Big|_{x=1}v\big|_{x=1}dy +$$

$$+\int\limits_0^1 u_y\Big|_{y=0}v\big|_{y=0}dx - \int\limits_0^1\left(1+x^2\right)u_y\Big|_{y=1}v\big|_{y=1}dx =$$

$$= \iint_\Omega \left(1 + x^2 y\right)(u_x v_x + u_y v_y)dxdy + \int_0^1 u_x\big|_{x=0}\, v\big|_{x=0}\, dy +$$

$$+ \int_0^1 u\big|_{y=0}\, v\big|_{y=0}\, dx - \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\varphi(x) v\big|_{y=1}\, dx.$$ Потребуем ещё, чтобы $v \in H$, т.е. $v\big|_{x=0} = 0$. Тогда формула интегрирования по частям даёт интегральное равенство

$$\iint_\Omega \left(1 + x^2 y\right)(u_x v_x + u_y v_y)dxdy + \int_0^1 u\big|_{y=0}\, v\big|_{y=0}\, dx -$$

$$- \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\varphi(x) v\big|_{y=1}\, dx = \iint_\Omega f(x,y) v dxdy \text{ или}$$

$$\iint_\Omega \left(1 + x^2 y\right)(u_x v_x + u_y v_y)dxdy + \int_0^1 u\big|_{y=0}\, v\big|_{y=0}\, dx - \tag{2}$$

$$- \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\varphi(x) v\big|_{y=1}\, dx - \iint_\Omega f(x,y) v dxdy = 0.$$

Определение. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи (1), если

- $u\big|_{x=0} = 0$, т.е. $u \in H$;
- для любой функции $v \in H$ выполнено интегральное равенство (2).

Нетрудно видеть, что равенство (2) можно переписать в виде

$$\forall v \in H \;\; (u, v)' - \langle l, v\rangle = 0, \tag{3}$$

где $(u, v)' = \iint_\Omega \left(1 + x^2 y\right)(u_x v_x + v_x v_y)dxdy + \int_0^1 u\big|_{y=0}\, v\big|_{y=0}\, dx$

— билинейная симметрическая форма,

$$\langle l, v\rangle = \int\limits_0^1 \left(1 + x^2\right) \varphi(x) v\,\big|_{y=1}\, dx + \iint\limits_\Omega f(x,y) v dx dy \,—$$

линейный функционал. В следующем пункте мы покажем, что соотношение (3) есть необходимое условие экстремали функционала энергии $E(u) = (u,u)' - 2\langle l, u\rangle$. Итак,

$$E(u) = \iint\limits_\Omega \left(1 + x^2 y\right) |\nabla u|^2 dx dy + \int\limits_0^1 u^2\,\Big|_{y=0}\, dx - \\ -2\int\limits_0^1 \left(1 + x^2\right) \varphi(x) u\,\big|_{y=1}\, dx - 2\iint\limits_\Omega f(x,y) u dx dy\,. \tag{4}$$

2) Варьируя функционал энергии $E = E(u)$, убедимся в том, что $\mathscr{L}u = f(x,y)$ — его уравнение Эйлера-Лагранжа, а краевые условия для этого функционала есть заданные краевые условия.

Пусть $u^* \in H$ — экстремаль функционала энергии $E(u) = (u,u)' - 2\langle l, u\rangle$, минимизирующая его. Рассмотрим $\delta u = v \in H$, $t \in \mathbb{R}$ и приращении функционала $E(u^* + tv) - E(u^*)$. Пользуясь билинейностью и симметричностью формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)'$, а также линейностью функционала $\langle l, \cdot\,\rangle$, имеем следующее выражение для приращения:

$$E(u^* + tv) - E(u^*) = (u^* + tv, u^* + tv)' - 2\langle l, u^* + tv\rangle - (u^*, u^*)' - 2\langle l, u^*\rangle = \\ = t^2 (v,v)' + 2t\,(u^*, v) + (u^*, u^*) - 2\langle l, u^*\rangle - 2t\langle l, v\rangle - \\ -(u^*, u^*)' - \langle l, u^*\rangle = t^2 (v,v)' + 2t\left((u^*, v)' - \langle l, v\rangle\right).$$

Поскольку u^* минимизирует функционал энергии, приращение должно быть $\geqslant 0$. Отсюда, учитывая $(v,v)' > 0$ при $v \neq 0$ (см. далее), $(u^*, v)' - \langle l, v\rangle = 0$ для любой $v \in H$, что идентично соотношению (3).

Чтобы теперь получить из (3) (или (2)) краевую задачу (1), необходимо дополнительно сделать предположение о том, что экстремаль $u \in H^2(\Omega)$. Тогда можно применить формулу интегрирования по частям к первому интегралу в левой части равенства (2):

$$-\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+x^2y\right)u_x\right)vdxdy - \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+x^2y\right)u_y\right)vdxdy+$$

$$+\int_0^1 \left(1+x^2y\right)u_xv\Big|_{x=0}(-1)dy + \int_0^1 \left(1+x^2y\right)u_xv\Big|_{x=1}dy+$$

$$+\int_0^1 \left(1+x^2y\right)u_yv\Big|_{y=0}(-1)dx + \int_0^1 \left(1+x^2y\right)u_yv\Big|_{y=1}1dx+$$

$$+\int_0^1 u\big|_{y=0}\,v\big|_{y=0}\,dx - \int_0^1 \left(1+x^2\right)\varphi(x)v\big|_{y=1}\,dx - \iint_\Omega f(x,y)vdxdy = 0$$

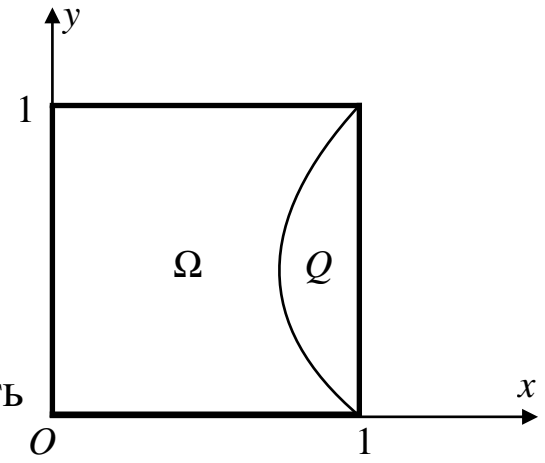
$$\Leftrightarrow 0 = \iint_\Omega \left(\mathscr{L}u - f(x,y)\right)vdxdy + \int_0^1 (1+y)u_x\Big|_{x=1}\,v\big|_{x=1}\,dy+$$

$$+\int_0^1 \left(-u_y + u\Big|_{y=0}\right)v\big|_{y=0}(-1)dx + \int_0^1 \left(1+x^2\right)\left(u_y\Big|_{y=1} - \varphi(x)\right)v\big|_{y=1}\,dx.$$

- Имеем для $\forall v \in \mathscr{D}(\Omega)$ $\iint_\Omega \left(\mathscr{L}u - f(x,y)\right)vdxdy = 0$, по лемме Дюбуа-Реймона $\mathscr{L}u = f(x,y)$ — уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала энергии (4).
- Краевое условие $u\big|_{x=0} = 0$, потому что экстремаль $u \in H$.
- Пусть $\psi \in \mathscr{D}(0,1)$. Рассмотрим поднятие Ψ этой функции в квадрат Ω, носитель которого находится в подобласти Q, показанной на рисунке.

Тогда последнее интегральное равенство упроститься до

$$\iint_Q \left(\mathscr{L}u - f(x,y)\right)\Psi dxdy + \int_0^1 (1+y)\psi(y)u_x\Big|_{x=1} dy = 0.$$



Меру области Q можно устремить к нулю так, чтобы L_2-норма Ψ также стремилась к нулю. Но тогда предельный переход $\operatorname{mes} Q \to 0$ в последнем равенстве даёт

$$\int_0^1 (1+y)\psi(y)u_x\Big|_{x=1} dy = 0 \Rightarrow \text{(по лемме Дюбуа-Реймона)}$$

$u_x\Big|_{x=1} = 0$. Аналогично можно получить оставшиеся краевые условия $-u_y + u\Big|_{y=0} = 0$ и $u_y\Big|_{y=1} = \varphi(x)$.

Таким образом, задача (1) есть необходимое условие экстремали функционала энергии (4) в энергетическом пространстве $H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u\big|_{x=0} = 0 \right\}$.

Остановимся на существовании и единственности экстремали. Вспомним, что функционал энергии имеет вид $E(u) = (u,u)' - 2\langle l, u\rangle$, где

$$(u,v)' = \iint_\Omega \left(1 + x^2 y\right)(u_x v_x + v_x v_y)dxdy + \int_0^1 u\big|_{y=0}\, v\big|_{y=0}\, dx —$$

билинейная и симметрическая форма в H, а

$$\langle l, u\rangle = \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\varphi(x)v\big|_{y=1} dx + \iint_\Omega f(x,y)v dxdy —$$

линейный функционал. Из теоремы об эквивалентной норме следует, что форма $(\cdot\,,\cdot)'$ задаёт скалярное произведение, порождающее норму, эквивалентную стандартной (обозначим её через $\|\cdot\|'$). Легко показать, что линейный функционал $\langle l, \cdot\rangle$ ограничен в H; пусть $\|l\|$ — его норма, ассоциированная с эквивалентной нормой в H.

Покажем, что функционал энергии ограничен снизу: $|\langle l,u\rangle| \leqslant \|l\|\|u\|' \Leftrightarrow -\|l\|\|u\|' \leqslant \langle l,u\rangle \leqslant \|l\|\|u\|'$. Имеем $E(u) = (u,u)' - 2\langle l,u\rangle \geqslant \|u\|'^2 - 2\|l\|\cdot\|u\|' + \|l\|^2 - \|l\|^2 = \left(\|u\|' - \|l\|\right)^2 - \|l\|^2 \geqslant -\|l\|^2$. Следовательно, $\exists m = \inf\limits_{u\in H} E(u) > -\infty$.

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ — такая последовательность функций из энергетического пространства, что $E(u_k) \to m$ при $k \to \infty$ (минимизирующая последовательность). Воспользуемся тождеством параллелограмма:

$$\left\| \frac{u_j - u_k}{2} \right\|'^2 = \frac{1}{2}\|u_j\|'^2 + \frac{1}{2}\|u_k\|'^2 - \left\| \frac{u_j + u_k}{2} \right\|'^2 + 2\left\langle l, \frac{u_j+u_k}{2}\right\rangle -$$

$$-\langle l,u_j\rangle - \langle l,u_k\rangle = \frac{1}{2}E(u_j) + \frac{1}{2}E(u_k) - E\left(\frac{u_j+u_k}{2}\right).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $N \in \mathbb{N}$, что $\forall j,k \in \mathbb{N}$, $j,k \geqslant N$, $E(u_j) < m+\varepsilon$, $E(u_k) < m+\varepsilon$. Т.к. $E\left(\frac{u_j+u_k}{2}\right) \geqslant m$,

$$\left\| \frac{u_j - u_k}{2} \right\|'^2 = \frac{1}{2}E(u_j) + \frac{1}{2}E(u_k) - E\left(\frac{u_j+u_k}{2}\right) \leqslant m + \varepsilon - m = \varepsilon\,.$$

Итак, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность. Из полноты пространства H следует, что $\exists u^* = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, а из непрерывности функционала энергии $\Rightarrow u^*$ есть экстремаль.

Докажем, что экстремаль $u^* \in H$ единственна. Пусть $u^\star \in H$ — другая экстремаль, $u^\star \neq u^*$. Составим последовательность $\{u^*, u^\star, u^*, u^\star, \dots\}$. С одной стороны, данная последовательностью минимизирует функционал энергии,

поэтому дожна быть фундаментальной. С другой стороны, она не может быть фундаментальной, потому что $\|u^* - u^\star\|' \neq 0$. Противоречие указывает на единственность экстремали.

3) Сделаем выбор базиса в энергетическом пространстве H.

Как выбрать базис в энергетическом пространстве? Начнём с пространств функций одной переменной.

- Система полиномов $\left\{x^j(L-x)^k\right\}_{j,k=1}^{\infty}$ тотальна в пространстве $H_0^1(0,L)$. В самом деле, пространство многочленов, которые равны нулю в точках $x = 0$ и $x = L$, всюду плотно в $H_0^1(0,L)$ (это следует из теоремы Вейрштрасса, теоремы о плотности гладких функций в $H^1(0,L)$ и конструкции оператора следа). Каждый многочлен, который равен нулю в точках $x = 0$ и $x = L$, имеет вид $P(x) = x^m(L-x)^n Q(x)$, где $m, n \geqslant 1$, Q — другой многочлен, поэтому его можно получить как линейную комбинацию полиномов из приведённой выше системы. Многочлены из системы $\left\{x^j(L-x)^k\right\}_{j,k=1}^{\infty}$ можно упорядочить по возрастанию степеней: а) многочлен второй степени $x(L-x)$; б) многочлены третьей степени $\{x^2(L-x), x(L-x)^2\}$; в) многочлены четвёртой степени $\{x^3(L-x), x^2(L-x)^2, x(L-x)^3\}$ и т.д. Все многочлены в системе $\{x^k(L-x), x^{k-1}(L-x)^2, \ldots, x(L-x)^k\}$ $(k \geqslant 1)$ линейно независимы. Действительно, если предположить, что $\alpha_1 x^k(L-x) + \alpha_2 x^{k-1}(L-x)^2 + \ldots + \alpha_k x(L-x)^k = 0$ для каких-нибудь $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, то, дифференцируя по x, будем иметь: $\alpha_1 k x^{k-1}(L-x) + \alpha_1 x^k(-1) + \alpha_2(k-1)x^{k-2}(L-x)^2 + {}$ $+\alpha_2 x^{k-1}2(L-x)(-1) + \ldots + \alpha_k(L-x)^k + \alpha_k x k(L-x)^{k-1}(-1) = 0.$ Подстановка $x = 0$ даёт $\alpha_k = 0 \Rightarrow$ $\alpha_1 x^k(L-x) + \alpha_2 x^{k-1}(L-x)^2 + \ldots + \alpha_{k-1} x^2(L-x)^{k-1} = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1 x^{k-1}(L-x) + \alpha_2 x^{k-2}(L-x)^2 + \ldots + \alpha_{k-1} x(L-x)^{k-1} = 0.$
Повторяя предыдущие рассуждения имеем $\alpha_{k-1} = \ldots = \alpha_1 = 0.$
Однако, между собой указанные системы однородных полиномов линейно зависимые. Например,
$x^2(L-x) + x(L-x)^2 = x(L-x)(x+L-x) = Lx(L-x);$
$x^3(L-x) - x(L-x)^3 = x(L-x)\left(x^2 - (L-x)^2\right) = x(L-x)\left(2Lx - L^2\right) =$
$= 2Lx^2(L-x) - L^2 x(L-x);$
$x^3(L-x) + x^2(L-x)^2 = x^2(L-x)(x+L-x) = Lx^2(L-x)\ldots$
Одна из максимальных линейно независимых подсистем имеет вид $\left\{x^j(L-x)\right\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow$ полиномиальный базис в $H_0^1(0,L)$ есть $\left\{x^j(L-x)\right\}_{j=1}^{\infty}$.

- тригонометрический базис в пространстве $H_0^1(0,L)$ имеет вид $\left\{ \sin \frac{\pi k x}{L} \right\}_{k=1}^{\infty}$. Действительно, последние функции есть собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, которые удовлетворяют условиям условиям Дирихле на границе $(0,L)$. Хорошо известно, что они дают базис в $H_0^1(0,L)$.
- Система полиномов $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, очевидно, образует базис в пространстве $H^1(0,L)$.
- Тригонометрический базис в пространстве $H^1(0,L)$ имеет вид $\left\{ \cos \frac{\pi k x}{L} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Действительно, последние функции есть собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, которые удовлетворяют однородным условиям Неймана на границе интервала $(0,L)$. Из теории задач Штурма-Лиувилля известно, что они дают базис в $H^1(0,L)$.
- Система полиномов $\left\{x^{k+1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ образует базис в пространстве $H'(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\}$.

- Тригонометрический базис в пространстве $H'(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\}$ имеет вид $\left\{ \sin \dfrac{\pi(k+1/2)x}{L} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Действительно, последние функции есть собственные функции оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, которые удовлетворяют однородному условию Дирихле при $x = 0$ и однородному условию Неймана при $x = L$.
- Система полиномов $\left\{(L-x)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $H''(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(L) = 0\}$.
- Тригонометрический базис в пространстве $H''(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(L) = 0\}$ имеет вид $\left\{ \cos \dfrac{\pi(k+1/2)x}{L} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Действительно, последние функции есть собственные функции оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, которые удовлетворяют однородному условию Неймана при $x = 0$ и однородному условию Дирихле при $x = L$.

Рассмотрим одномерную краевую задачу и соответствующую ей вариационную проблему с известным решением. Испытаем два базиса — полиномиальный и тригонометрический.

Пример. Краевая задача

$$\begin{cases} -u'' + u = x, 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

эквивалентна вариационной проблеме вида

$$E(u) = \int_0^1 \left(u'^2 + u^2\right) dx - 2\int_0^1 xu\,dx \to \min,\ u \in H^1(0,1).$$

А именно, единственная экстремаль функционала энергии есть обобщённое решение краевой задачи (покажите это самостоятельно). С другой стороны, задача (5) имеет единственное решение, которое легко найти:

$\hat{u}(x) = A\cosh x + B\sinh x + x$, $\hat{u}'(x) = A\sinh x + B\cosh x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\sinh 0 + B\cosh 0 + 1 = 0, \\ A\sinh 1 + B\cosh 1 + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1, \\ A = \dfrac{-1+\cosh 1}{\sinh 1}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hat{u}(x) = \frac{-1+\cosh 1}{\sinh 1}\cosh x - \sinh x + x.$$

Рассмотрим в пространстве $H^1(0,1)$ базис $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ и организуем схему метода Ритца построения минимизирующей последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, сходящейся к экстремали. Пусть $u_k(x) = c_0^{(k)}e_0(x) + c_1^{(k)}e_1(x) + \ldots + c_k^{(k)}e_k(x)$, $(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx$ — стандартное скалярное произведение в $H^1(0,1)$. Тогда вариационная проблема на подпространстве $E_k = \mathrm{Lin}(e_0, e_1, \ldots, e_k)$ имеет вид

$$\sum_{i,j=0}^{k} \left(e_i, e_j\right) c_i^{(k)} c_j^{(k)} - 2\sum_{i=0}^{k} c_i^{(k)} \left(x, e_i\right)_{L_2(0,1)} \to \min.$$

Пусть $G^{(k)} = \left((e_i, e_j)\right)_{i,j=1}^{k}$ — матрица Грама порядка $(k+1)$ системы $\left\{e_0, e_1, \ldots, e_k\right\}$;

$f^{(k)} = \left((x,e_0)_{L_2(0,1)}, (x,e_1)_{L_2(0,1)} \ldots, (x,e_k)_{L_2(0,1)}\right)^T$ — столбец скалярных произведений. Тогда единственная точка экстремума $\hat{c}^{(k)} = \left(c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \ldots, c_k^{(k)}\right)^T$ есть решение системы линейных уравнений

$$G^{(k)}\hat{c}^{(k)} = f^{(k)} \;\Rightarrow\; \hat{c}^{(k)} = G^{-(k)}f^{(k)}.$$

Итак, k-ое приближение Ритца имеет вид $u_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \hat{c}^{(k)}x^k$.

Последовательность приближений Ритца $u_k \to \hat{u}$ при $k \to \infty$ в $H^1(0,1)$. Реализуем описанную схему в Maple и сравним два базиса — полиномиальный и тригонометрический (см.

пример #0 в оригинальном MAPLE-документе на странице курса в LMS).

Вывод: тригонометрический базис лучше с вычислительной точки зрения (матрица Грама оказывается диагональной), однако, полиномиальный базис лучше в том смысле, что значение функционала энергии его приближения Ритца меньше (дельты энергий отличаются примерно в 20 раз).

Рассмотрим два базиса в энергетическом пространстве:

- полиномиальный базис в $H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u\big|_{x=0} = 0 \right\}$ имеет вид $\{x^{k+1} y^j\}_{k=0,j=0}^{\infty,\infty}$;
- тригонометрический базис в $H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u\big|_{x=0} = 0 \right\}$ представляет собой $\left\{ \sin\left(\pi(k+1/2)x\right) \cos\left(\pi j y\right) \right\}_{k=0,j=0}^{\infty,\infty}$.

Оба базиса образованы произведениями базисных функций пространств $H'(0,1)$ и $H^1(0,1)$.

4) Получим общую схему Ритца построения минимизирующей последовательности, сходящейся к экстремали $\operatorname{argmin}_{u \in H} E(u)$**.**

Пусть $\{\tilde{e}_{kj}\}_{k,j=0}^{\infty}$ — какой-нибудь из двух выбранных базисов в энергетическом пространстве H. Пусть $N \in \mathbb{N}$; рассмотрим подпространство размерности N^2, построенное на базисных функциях, имеющее вид $E_N = \operatorname{Lin} \{\tilde{e}_{kj}\}_{k,j=0}^{N-1}$. Перенумеруем каким-нибудь образом базисные функции с помощью единственного индекса $s = 0, \ldots, N^2 - 1$: $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{N^2-1}$. Например, можно положить $e_0 = \tilde{e}_{00}$, $e_1 = \tilde{e}_{10}$, $e_2 = \tilde{e}_{01}$, $e_3 = \tilde{e}_{20}$, $e_4 = \tilde{e}_{11}$, $e_5 = \tilde{e}_{02}$, $e_6 = \tilde{e}_{30}, \ldots, e_{N^2-2} = e_{N-2,N-1}$, $e_{N^2-1} = \tilde{e}_{N-1,N-1}$.

- Построим матрицу Грама $G_N = \left(g_{st}\right)_{s,t=0}^{N^2-1}$ системы функций $\{e_s\}_{s=0}^{N^2-1}$, положив

$$g_{st} = \left(e_s, e_t\right)' = \iint_\Omega \left(1 + x^2 y\right)\left(\frac{\partial e_s}{\partial x}\frac{\partial e_t}{\partial x} + \frac{\partial e_s}{\partial y}\frac{\partial e_t}{\partial y}\right) dxdy + \int_0^1 e_s(x,0)e_t(x,0)dx\,.$$

G_N — симметрическая и положительно определённая матрица порядка N^2.

- Построим столбец $\Phi_N = \left(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N^2-1}\right)^T$, соответствующий граничной функции $\varphi \in L_2(0,1)$ в краевом условии $u_y\Big|_{y=1} = \varphi(x)$. Имеем

$$\varphi_s = \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\varphi(x)e_s(x,1)dx,\ s = 0,\ldots, N^2 - 1.$$

- Построим столбец $F_N = \left(f_0, f_1, \ldots, f_{N^2-1}\right)^T$, соответствующий функции $f \in L_2(\Omega)$ в правой части уравнения:

$$f_s = \iint_\Omega f(x,y)e_s(x,y)dxdy,\ s = 0,\ldots, N^2 - 1.$$

Пусть $u_N \in E_N$, т.е. $u_N(x,y) = c_0^{(N)}e_0(x,y) + c_1^{(N)}e_1(x,y) + \ldots + c_{N^2-1}^{(N)}e_{N^2-1}(x,y)$. Вариационная проблема на подпространстве E_N имеет вид

$$\sum_{s,t=0}^{N^2-1} g_{st}c_s^{(N)}c_t^{(N)} - 2\sum_{s=0}^{N^2-1} c_s^{(N)}\left(\varphi_s + f_s\right) \to \min. \quad (6)$$

Единственная точка экстремума $\hat{c}^{(N)} = \left(c_0^{(N)}, c_1^{(N)}, \ldots, c_{N^2-1}^{(N)}\right)^T$ (решение задачи (6)) удовлетворяет системе линейных уравнений

$$G_N\hat{c}^{(N)} = F_N + \Phi_N \Rightarrow \hat{c}^{(N)} = G_N^{-1}(F_N + \Phi_N). \quad (7)$$

Итак, N-ое приближение Ритца имеет вид

$$\hat{u}_N(x,y) = \hat{c}_0^{(N)}e_0(x,y) + \hat{c}_1^{(N)}e_1(x,y) + \ldots + \hat{c}_{N^2-1}^{(N)}e_{N^2-1}(x,y);$$

вектор коэффициентов $\left(\hat{c}_0^{(N)}, \hat{c}_1^{(N)}, \ldots, \hat{c}_{N^2-1}^{(N)}\right)^T = \hat{c}^{(N)}$ есть единственное решение системы (7). Последовательность $\{\hat{u}_N\}_{N=1}^{\infty}$ сходится в энергетическом пространстве к u^* — единственной экстремали функционала энергии (4) и единственному обобщённому решению краевой задачи (1).

5) Для указанных правых частей получим в MAPLE 2025 приближение Ритца $U_{N,N}(x,y)$ для первых $N \times N = N^2$ базисных функций при $N = 4$ (см. оригинальный MAPLE-документ на странице курса в LMS; free-trial версия математической среды доступна по ссылке, она работает 15 дней).

```
restart;
with(plots) : with(LinearAlgebra) :
```

• Зададим билинейную симметрическую форму.

```
scalprod := (u, v)→int((1 + x^2·y)·(diff(u, x)·diff(v, x) + diff(u, y)·diff(v, y)), [x = 0..1, y = 0..1]) + int(subs(y = 0, u)·subs(y = 0, v), x = 0..1);
```

$$scalprod := (u,v) \to \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 y + 1\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} u\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} v\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} u\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} v\right)\right) dxdy + \int_0^1 subs(y = 0, u)\, subs(y = 0, v)\, dx$$

• Зададим часть линейного функционала, которая зависит от граничной функции φ.

```
linphi := (u, phi)→int((1 + x^2)·phi·subs(y = 1, u), x = 0..1);
```

$$linphi := (u, \phi) \mapsto \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)\cdot\phi\cdot subs(y = 1, u)\, dx$$

• Зададим часть линейного функционала, зависящую от правой части f.

```
linf := (u, f)→int(f·u, [x = 0..1, y = 0..1]);
```

$$linf := (u, f) \mapsto \int_0^1 \int_0^1 f\cdot u\, dx\, dy$$

• Определимся с глубиной разложения.

```
N := 4;
```

$$N := 4$$

• Рассмотрим полимиальный базис с двойной индексацией.

```
epolkj := (k, j)→x^(k + 1)·y^j;
```

$$epolkj := (k, j) \mapsto x^{k+1}\cdot y^j$$

• Сделаем перенумерацию полиномиальных базисных функций.

```
epols := Vector(N^2) : s := 0;
```

$$s := 0$$

for i **from** 0 **to** $2\cdot N-2$ **do**
for j **from** $i-\min(i,N-1)$ **to** $\min(i,N-1)$ **do**
$s := s+1$; $epols[s] := epolkj(i-j,j)$ **end do**
end do;

• Первая, N-ая и последняя базисные функции:

$epols[1]$, $epols[N]$, $epols[N^2]$;

$$x,\ x^3,\ x^4\,y^3$$

• Построим матрицу Грама полиномиального базиса.

$GNpol := Matrix(N^2, N^2)$:

for i **from** 1 **to** N^2 **do**

$$\begin{bmatrix}
\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{18} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & \frac{3}{2} & \frac{7}{10} & \frac{11}{24} & \frac{19}{60} & \cdots \\
\frac{3}{2} & \frac{29}{15} & \frac{2}{3} & \frac{13}{6} & \frac{14}{15} & \frac{11}{24} & \frac{81}{35} & \frac{13}{12} & \frac{29}{45} & \frac{7}{20} & \cdots \\
\frac{11}{18} & \frac{2}{3} & \frac{17}{20} & \frac{7}{10} & \frac{19}{24} & \frac{47}{60} & \frac{13}{18} & \frac{317}{420} & \frac{32}{45} & \frac{133}{180} & \cdots \\
\frac{3}{2} & \frac{13}{6} & \frac{7}{10} & \frac{181}{70} & \frac{13}{12} & \frac{29}{60} & \frac{23}{8} & \frac{93}{70} & \frac{3}{4} & \frac{37}{100} & \cdots \\
\frac{2}{3} & \frac{14}{15} & \frac{19}{24} & \frac{13}{12} & \frac{577}{630} & \frac{32}{45} & \frac{124}{105} & \frac{47}{48} & \frac{138}{175} & \frac{79}{120} & \cdots \\
\frac{5}{12} & \frac{11}{24} & \frac{47}{60} & \frac{29}{60} & \frac{32}{45} & \frac{9}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1397}{2100} & \frac{47}{60} & \frac{167}{175} & \cdots \\
\frac{3}{2} & \frac{81}{35} & \frac{13}{18} & \frac{23}{8} & \frac{124}{105} & \frac{1}{2} & \frac{23}{7} & \frac{3}{2} & \frac{86}{105} & \frac{23}{60} & \cdots \\
\frac{7}{10} & \frac{13}{12} & \frac{317}{420} & \frac{93}{70} & \frac{47}{48} & \frac{1397}{2100} & \frac{3}{2} & \frac{1411}{1260} & \frac{33}{40} & \frac{17}{28} & \cdots \\
\frac{11}{24} & \frac{29}{45} & \frac{32}{45} & \frac{3}{4} & \frac{138}{175} & \frac{47}{60} & \frac{86}{105} & \frac{33}{40} & \frac{17}{21} & \frac{683}{840} & \cdots \\
\frac{19}{60} & \frac{7}{20} & \frac{133}{180} & \frac{37}{100} & \frac{79}{120} & \frac{167}{175} & \frac{23}{60} & \frac{17}{28} & \frac{683}{840} & \frac{911}{840} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}$$

16 × 16 Matrix

• Рассмотрим тригонометрический базис с двойной индексацией.

$$etrigkj := (k,j)\to \sin\left(\mathrm{Pi}\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)\cdot\cos(\mathrm{Pi}\cdot j\cdot y);$$

$$etrigkj := (k,j)\mapsto \sin\left(\pi\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot x\right)\cdot\cos(\pi\cdot j\cdot y)$$

• Сделаем перенумерацию тригонометрических базисных функций.

$etrigs := Vector(N^2)$: $s := 0$;

$$s := 0$$

for i **from** 0 **to** $2\cdot N-2$ **do**
for j **from** $i-\min(i,N-1)$ **to** $\min(i,N-1)$ **do**
$s := s+1$; $etrigs[s] := etrigkj(i-j,j)$ **end do**
end do;

• Первая, N-ая и последняя базисные функции:

$etrigs[1], etrigs[N], etrigs[N^2];$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right), \sin\left(\frac{7\pi x}{2}\right)\cos(3\pi y)$$

• Построим матрицу Грама тригонометрического базиса.

$GNtrig := Matrix(N^2, N^2):$

for i **from** 1 **to** N^2 **do**

for j **from** i **to** N^2 **do**

$GNtrig[i,j] := scalprod(etrigs[i], etrigs[j]);$

$GNtrig[j,i] := GNtrig[i,j];$

end do end do:

• Посмотрим на часть матрицы Грама тригонометрического базиса.

$GNtrig;$

$$\begin{bmatrix}
\frac{7\pi^2}{48}+\frac{3}{8} & -\frac{9}{32} & -\frac{\pi^2-6}{12\pi^2}+\frac{1}{2} & \frac{25}{288} & \frac{9}{8\pi^2} \\
-\frac{9}{32} & \frac{21\pi^2}{16}+\frac{3}{8} & \frac{9}{8\pi^2} & -\frac{225}{128} & -\frac{3\pi^2-2}{4\pi^2}+\frac{1}{2} \\
-\frac{\pi^2-6}{12\pi^2}+\frac{1}{2} & \frac{9}{8\pi^2} & \frac{11}{16}+\frac{35\pi^2}{96} & -\frac{25}{72\pi^2} & -\frac{29}{64} \\
\frac{25}{288} & -\frac{225}{128} & -\frac{25}{72\pi^2} & \frac{175\pi^2}{48}+\frac{3}{8} & \frac{225}{32\pi^2} \\
\frac{9}{8\pi^2} & -\frac{3\pi^2-2}{4\pi^2}+\frac{1}{2} & -\frac{29}{64} & \frac{225}{32\pi^2} & \frac{67}{144}+\frac{91\pi^2}{96} \\
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{37\pi^2+162}{108\pi^2}+\frac{1}{2} & 0 & \frac{205}{72\pi^2} \\
-\frac{49}{1152} & \frac{441}{800} & \frac{49}{288\pi^2} & -\frac{1225}{288} & -\frac{441}{200\pi^2} \\
-\frac{25}{72\pi^2} & \frac{225}{32\pi^2} & \frac{77}{576} & -\frac{25\pi^2-6}{12\pi^2}+\frac{1}{2} & -\frac{293}{256} \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{205}{72\pi^2} & 0 & -\frac{231\pi^2-26}{324\pi^2}+\frac{1}{2} \\
-\frac{\pi^2-6}{108\pi^2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{8\pi^2} & \frac{1}{2} & -\frac{25}{648\pi^2} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}$$

• Зададим граничную функцию φ и правую часть уравнения f.

phi := x; $f := 1$;

$$\phi := x$$

$$f := 1$$

• Сформируем столбец, соответствующий граничной функции φ, для полиномиального базиса.

$PhiNpol := Vector(N^2):$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $PhiNpol[i] := linphi(epols[i], \text{phi})$ **end do**:

• Сформируем столбец, соответствующий граничной функции φ, для тригонометрического базиса.

$PhiNtrig := Vector(N^2):$

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $PhiNtrig[i] := linphi(etrigs[i], \text{phi})$ **end do**:

• Сформируем столбец, соответствующий правой части f, для полиномиального базиса.

$FNpol := Vector(N^2)$:

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $FNpol[i] := linf(epols[i], f)$ **end do**:

• Сформируем столбец, соответствующий правой части f, для полиномиального базиса.

$FNtrig := Vector(N^2)$:

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $FNtrig[i] := linf(etrigs[i], f)$ **end do**:

• Находим коэффициенты приближения Ритца (полиномиальный базис).

$uNpolvec := LinearSolve(GNpol, FNpol + PhiNpol)$;

$$uNpolvec := \begin{bmatrix} \frac{3764652602436737303019615189592053442485 10}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ -\frac{1786917943080954174483761087089963644366 46}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ \frac{3503175848934958828690885756222093523810 40}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ \frac{4831914432302223738586272755455598075425}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ -\frac{1292047377250301824067159881617657239356 50}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ -\frac{3691112905614943849857333988372178489401 0}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ -\frac{9224021408749161520110599174210482108258}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ -\frac{4679783568714400917633480406029746052114 0}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ \frac{3277972581957671404289832107122575695265 60}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ \frac{6063017870789759156552390516524089331162 0}{3893509208700638989888175134116552177264 77} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

16 element Vector[column]

• Находим коэффициенты приближения Ритца (тригонометрический базис).

$uNtrigvec := LinearSolve(GNtrig, FNtrig + PhiNtrig)$:

• Сформируем приближение Ритца для полиномиального базиса.

$uNpol := 0$:

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $uNpol := uNpol + uNpolvec[i] \cdot epols[i]$ **end do**:

• Сформируем приближение Ритца для тригонометрического базиса.

$uNtrig := 0$:

for i **from** 1 **to** N^2 **do** $uNtrig := uNtrig + evalf(uNtrigvec[i]) \cdot etrigs[i]$ **end do**:

• Посмотрим на то, что у нас получилось:

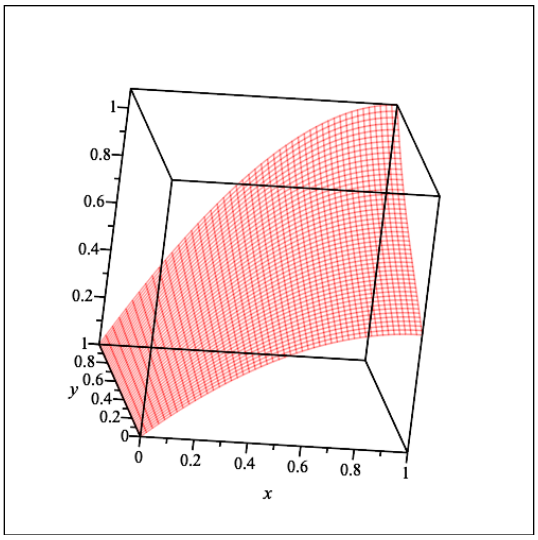
$uNpol$;

$$-\frac{36120863736992892709107324365202080300356 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^4y^3+\frac{69016988347971665861574406723872573854632 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^3y^3+$$
$$\frac{33381117073795499115714740002478412354936 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^4y^2-\frac{28354663966750005296172437465810562523220 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^2y^3-$$
$$\frac{70236938222341808594973778973714041180593 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^3y^2+\frac{24817365113275262078484651446095050404028}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^4y+$$
$$\frac{60630178707897591565523905165240893311620}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x\,y^3+\frac{32779725819576714042898321071225756952656 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^2y^2-$$
$$\frac{46797835687144009176334804060297460521140}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^3y-\frac{92240214087491615201105991742104821082 58}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^4-$$
$$\frac{36911129056149438498573339883721784894010}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x\,y^2-\frac{12920473772503018240671598816176572393565 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^2y+$$
$$\frac{48319144323022237385862727554555980754 25}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^3+\frac{35031758489349588286908857562220935238104 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x\,y-$$
$$\frac{17869179430809541744837610870899636443664 6}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x^2+\frac{37646526024367373030196151895920534424851 0}{38935092087006389898881751341165521772647 7}x$$

6) Визуализируем в MAPLE приближения Ритца, т.е. построим двумерную поверхность — график $U_{N,N}(x,y)$ (и сравним графики при разных значениях N).

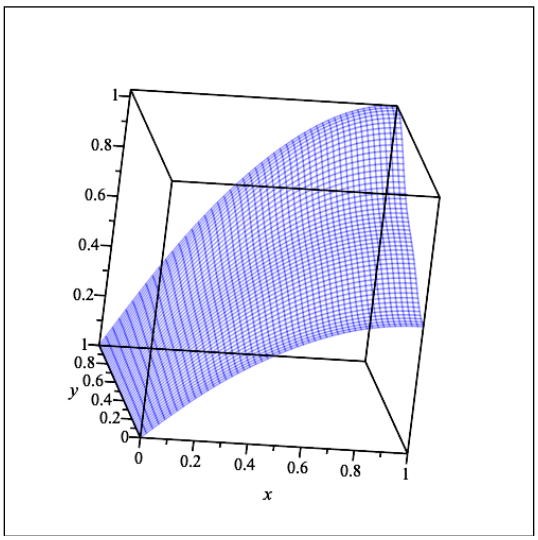
• Визуализируем приближение Ритца (полиномиальный базис).

plot3d(*uNpol*, *x* = 0 .. 1, *y* = 0 ..1, *size* = [*default*, *square*], *orientation* = [−80, 70, 20]);



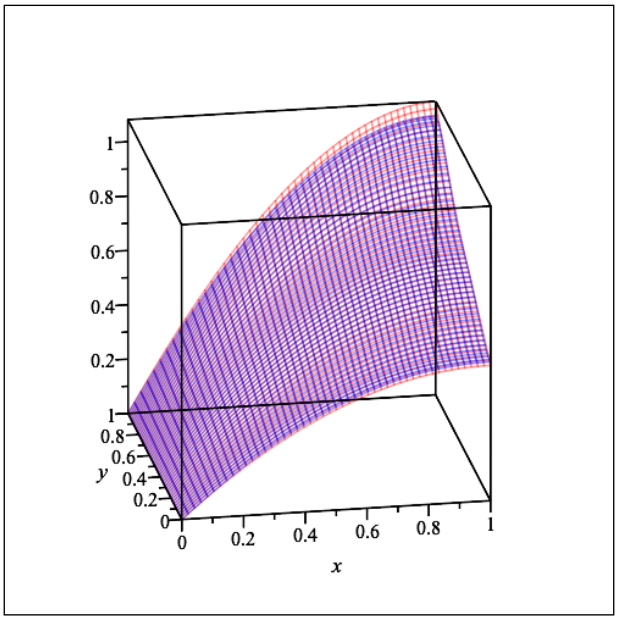
• Визуализируем приближение Ритца (тригонометрический базис).

plot3d(*uNtrig*, *x* = 0 .. 1, *y* = 0 ..1, *size* = [*default*, *square*], *orientation* = [−80, 70, 20]);



• Построим оба приближения в одной системе координат.

plot3d([*uNpol*, *uNtrig*], *x* = 0 .. 1, *y* = 0 ..1, *color* = [*red*, *blue*], *size* = [*default*, *square*], *orientation* = [-100, 70, 0]);



Мы видим небольшое расхождение двух приближённых решений. Чтобы понять, какое из них лучше, сравним значения функционала энергии.

$$Epol := evalf(scalprod(uNpol, uNpol) - 2\cdot linphi(uNpol, \mathrm{phi}) - 2\cdot linf(uNpol, f));$$

$$Epol := -1.186921366$$

$$Etrig := evalf(scalprod(uNtrig, uNtrig) - 2\cdot linphi(uNtrig, \mathrm{phi}) - 2\cdot linf(uNtrig, f));$$

$$Etrig := -1.153466911$$

$$Etrig - Epol;$$

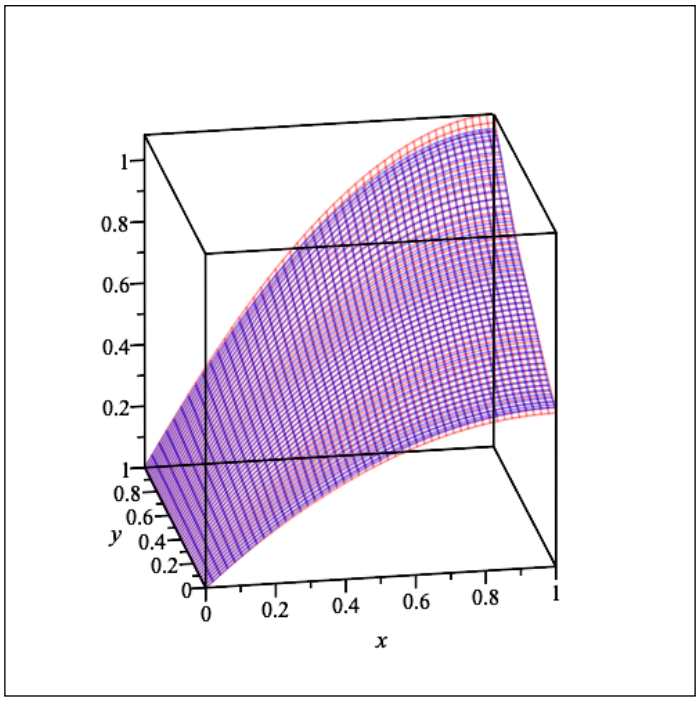
$$0.033454455$$

Итак, тригонометрический базис оказался хуже полиномиального: энергия приближения Ритца, построенного на первом, примерно на 1/30 больше, чем энергия приближения Ритца, построенного на полиномиальном базисе. Кроме того, вычисления в случае тригонометрического базиса требуют больше времени.

Увеличим число базисных функций с $4^2 = 16$ до $5^2 = 25$ и найдём приближения Ритца увеличенной глубины для полиномиального и тригонометрического базисов.

• Построим оба приближения в одной системе координат.

```
plot3d( [uNpol, uNtrig], x = 0 .. 1, y = 0 ..1, color = [red, blue], size = [default, square], orientation = [
    -100, 70, 0 ]);
```



Теперь два приближённых решения чуть больше похожи друг на друга. Чтобы понять, какое из них лучше, снова сравним значения функционала энергии на приближениях Ритца — полиномиальном и тригонометрическом.

```
Epol := evalf(scalprod(uNpol, uNpol) - 2·linphi(uNpol, phi) - 2·linf(uNpol, f) );
```

$$Epol := -1.186955318$$

```
Etrig := evalf(scalprod(uNtrig, uNtrig) - 2·linphi(uNtrig, phi) - 2·linf(uNtrig, f) );
```

$$Etrig := -1.155010425$$

```
Etrig - Epol;
```

$$0.031944893$$

Вывод: энергия приближения Ритца, построенного на полиномиальном базисе, изменилась незначительно, а энергия тригонометрического приближения Ритца немного уменьшилась. Следовательно, полиномиальное приближение Ритца уже весьма близко к истинному решению, тогда как тригонометрическое приближение ещё требует увеличения N.