Уравнения в частных производных

Гармонические функции

А.Е. Байков
к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ
https://baikov.org/pde

Содержание

1. Качественная теория гармонических функций

2. Разрешимость краевых задач

Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Техника усреднения

Теоремы о среднем дают основание полагать, что гармонические функции в действительности имеют в области Ω непрерывные производные всех порядков.

Теорема 2.1. Функция $u \in C^2(\Omega)$, гармоническая в области Ω, бесконечно дифференцируемая в Ω.

Для доказательства теоремы 2.1 обратимся к *технике усреднения*. Пусть $\varepsilon > 0$ и подобласть $Q_\varepsilon \Subset \Omega$ такова, что для любой $x^0 \in Q_\varepsilon$ $\operatorname{dist}\left(x^0, \partial\Omega\right) > \varepsilon$ (и наоборот). Оператор усреднения J_h радиуса $h < \varepsilon$ действует на функции $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ и выдаёт гладкие функции по формуле

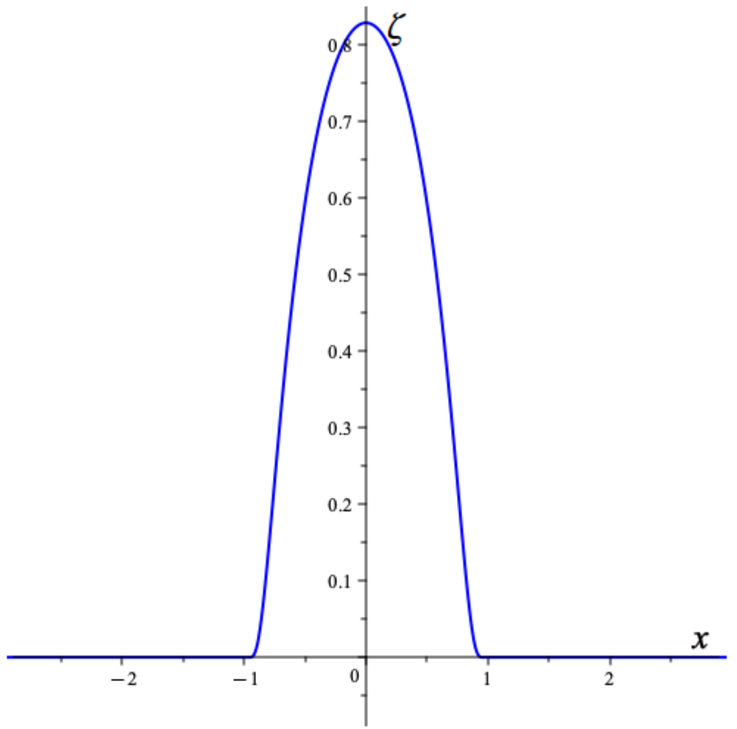
$$\left(\mathrm{J}_h u\right)\left(x^0\right) = \int\limits_{B_h\left(x^0\right)\Subset\Omega} \zeta_h\left(x^0 - x\right) u(x) dx, x^0 \in Q_\varepsilon,$$

Ядро усреднения

где ζ_h — *ядро усреднения* радиуса h. Эта функция должна иметь свойства:

- $\zeta_h \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right) = C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$;
- ζ_h — радиально-симметричная функция;
- $\operatorname{supp}\zeta_h = \overline{B}_h(0)$; $\zeta_h \geqslant 0$;
- $\int\limits_{B_h(0)} \zeta_h(x)dx = 1$ — условие нормировки.

$$\zeta_h(x) = \begin{cases} \dfrac{C_n}{h^n}\exp\left(\dfrac{-h^2}{h^2 - |x|^2}\right), |x| < h, \\ 0, |x| \geqslant h\,. \end{cases}$$



Бесконечная дифференцируемость гармонических функций

Доказательство теоремы 2.1. Умножим равенство (1.10) на $\omega_{n-1}\rho^{n-1}\zeta_h(\rho)$ и проинтегрируем по ρ от 0 до h: $u\left(x^0\right) =$

$$= u\left(x^0\right)\int\limits_0^h \omega_{n-1}\rho^{n-1}\zeta_h(\rho)d\rho = \int\limits_0^h d\rho \int\limits_{S_\rho\left(x^0\right)} u(x)\zeta_h\left(x^0 - x\right)ds = \left(\mathrm{J}_h u\right)\left(x^0\right).$$

Таким образом, функция u совпадает со своим усреднением радиуса $h < \varepsilon$ в области Q_ε. А так как $\mathrm{J}_h u$ — гладкая функция в этой области, то $u \in C^\infty\left(Q_\varepsilon\right)$ при любом $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, имеем $u \in C^\infty(\Omega)$. Теорема 2.1 доказана.

Внутренняя точечная априорная оценка производных гармонических функций

Поговорим об априорных оценках. Априорные оценки позволяют оценить решение уравнения и/или его производные без предъявления какой-либо явной формулы для решения. Они бывают разных видов (точечные, интегральные, внутренние, глобальные...) и чрезвычайно важны в функциональной и качественной теории УЧП.

Теорема 2.2. Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ — гармоническая функция в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $Q \Subset \Omega$ и $d = \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) > 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ и любой точки $x^0 \in \overline{Q}$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \left(x^0\right) \right| \leqslant \left(\frac{nk}{d} \right)^k \max_{\overline{\Omega}} |u|. \quad (2.1)$$

Внутренняя точечная априорная оценка производных гармонических функций

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ —мультииндекс, где $\alpha_j \in \mathbb{Z}, \alpha_j \geqslant 0, j = 1,\ldots, n$; $\mathbb{Z}_+^n$ —множество всех мультииндексов размерности n;
- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ — порядок мультииндекса;
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ — моном степени $|\alpha|$;
- $D^\alpha u = \partial^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ — частная производная.

Доказательство теоремы 2.2. Из теоремы 2.1 следует, что $D^\alpha u$ — гармоническая функция в области Ω при любом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

1) Пусть $B_R\left(x^0\right) \Subset \Omega$. По теореме о среднем по шару и формуле интегрирования по частям имеем

Внутренняя точечная априорная оценка производных гармонических функций

$$u_{x_j}\left(x^0\right) = \frac{1}{\kappa_n R^n}\int_{B_R\left(x^0\right)} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \frac{1}{\kappa_n R^n}\int_{S_R\left(x^0\right)} u\nu_j ds.$$

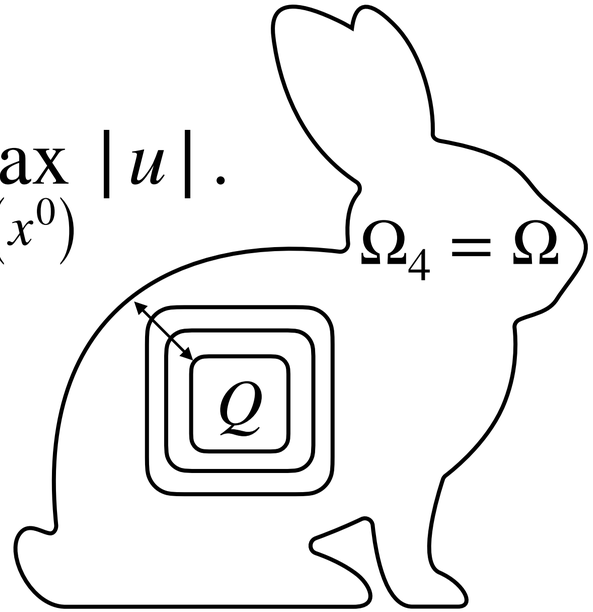
Оцениваем и применяем принцип максимума:

$$\left|u_{x_j}\left(x^0\right)\right| \leqslant \frac{\omega_{n-1}R^{n-1}}{\kappa_n R^n}\max_{S_R\left(x^0\right)}|u| = \frac{n}{R}\max_{\overline{B}_R\left(x^0\right)}|u|.$$

2) Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $|\alpha| = k > 1$. Построим семейство подобластей

$Q = \Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \ldots \Subset \Omega_{k+1} = \Omega$:

$$\Omega_{j+1} = \left\{x \in \Omega : \operatorname{dist}\left(x, \Omega_j\right) < \frac{d}{k}\right\}, j = 1, \ldots, k-1.$$



Внутренняя точечная априорная оценка производных гармонических функций

Для любой точки $x^0 \in \Omega_j$ шар $B_{\frac{d}{k}}\left(x^0\right) \Subset \Omega_{j+1}$. Теперь, используя первую часть доказательства, запишем для любой $x^0 \in \overline{Q}$ цепочку неравенств

$$\left|D^{\alpha} u\left(x^0\right)\right| \leqslant \frac{nk}{d} \max_{\overline{\Omega}_2}\left|D^{\alpha^1} u\right| \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{nk}{d}\right)^k \max_{\overline{\Omega}}|u|,$$

где $\left|\alpha^{j+1}\right| = \left|\alpha^j\right| - 1$, α^{j+1} отличается от α^j одним индексом.

Теорема 2.2 доказана.

Нормированные пространства

Определение. Пусть N — линейное функциональное пространство (множество функций, определённых на одном множестве, замкнутое относительно естественных линейных операций). Функционал $\|\cdot\| : N \to [0, +\infty)$ называется *нормой* в N, если он удовлетворяет аксиомам:

(i) для любых $u, v \in N$ $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (неравенство треугольника);

(ii) для любых $u \in N$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (однородность);

(iii) если $\|u\| = 0$, то $u = 0$ (невырожденность).

Пара $\left(N, \|\cdot\|\right)$ называется *нормированным пространством*.

Сходимость и фундаментальность

Пусть N — нормированное пространство.

- Последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N$ сходится к $u \in N$, если $\|u_j - u\| \to 0$ при $j \to \infty$.
- Последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $m \in \mathbb{N}$, что для всех $i, j \geqslant m$ $\|u_i - u_j\| < \varepsilon$.

Из сходимости последовательности следует её фундаментальность (упражнение), но обратное не всегда верно.

Определение. Нормированное пространство N называется *полным* или *банаховым*, если всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Равномерная норма

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество (например, $K = \partial\Omega$ или $K = \overline{\Omega}$), $C(K)$ — пространство всех функций, непрерывных на K. Функция $\|u\| = \sup\limits_K |u| = \max\limits_K |u|$ называется равномерной нормой в $C(K)$ (аксиомы проверяются устно).

- Сходимость относительно равномерной нормы эквивалентна равномерной сходимости.
- Из критерия Коши равномерной сходимость следует, что пространство $C(K)$ банахово.

Сходимость в пространствах дифференцируемых функций

Норма в пространстве $C^k\left(\overline{Q}\right)$ задаётся формулой $\|u\|_{k,\overline{Q}} = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} \max\limits_{\overline{Q}} \left|D^\alpha u\right|$, и относительно этой нормы пространство $C^k\left(\overline{Q}\right)$ банахово.

Определение 2.1. Пусть Ω — область (не обязательно ограниченная). Последовательность $\left\{u_j\right\}_{j=1}^{\infty} \subset C^\infty(\Omega)$ сходится к $u \in C^\infty(\Omega)$, если для любой $Q \Subset \Omega$ и любого $k \in \mathbb{N}_0$ $\left\| u_j - u \right\|_{k,\overline{Q}} \to 0$ при $j \to \infty$.

Пространство данных и пространство решений внутренней задачи Дирихле

- Пространство данных $C(\partial\Omega)$ — банахово пространство относительно нормы $\|\varphi\| = \max\limits_{\partial\Omega} |\varphi|$.
- Пространство решений $\mathcal{U} = C^\infty(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$: последовательность $\left\{u_j\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ сходится к $u \in \mathcal{U}$, если она сходится к этой функции в пространствах $C\left(\overline{\Omega}\right)$ и $C^\infty(\Omega)$.

Утверждение 2.1. Предположим, что последовательность граничных функций $\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{\infty} \subset C(\partial\Omega)$ сходится к функции $\varphi \in C(\partial\Omega)$ и для каждой φ_j существует решение задачи (1.14) $u_j \in \mathcal{U}$; кроме того, существует решение $u \in \mathcal{U}$ для предельной функции φ. Тогда $u_j \to u$ при $j \to \infty$ в $\mathcal{U}$.

Устойчивость внутренней задачи Дирихле

Доказательство. Сходимость последовательности $\left\{ u_j \right\}_{j=1}^{\infty}$ в $C\left(\overline{\Omega}\right)$ следует непосредственно из принципа максимума:

$$\left\| u_j - u \right\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{\overline{\Omega}} \left| u_j - u \right| = \max_{\partial\Omega} \left| \varphi_j - \varphi \right| = \left\| \varphi_j - \varphi \right\|_{C(\partial\Omega)} \to 0, j \to \infty .$$

Фиксируем подобласть $Q \Subset \Omega$, число $k \in \mathbb{N}$, получим оценку нормы $\left\| u_j - u \right\|_{k,\overline{Q}}$ (здесь $d = \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) > 0$):

$$\left\| u_j - u \right\|_{k,\overline{Q}} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \left\| u_j - u \right\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} \left(\frac{n|\alpha|}{d} \right)^{|\alpha|} \max_{\partial\Omega} \left| \varphi_j - \varphi \right| \to 0, j \to \infty.$$

Следовательно, $\left\{ u_j \right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится в $C^k\left(\overline{Q}\right)$, а так как Q и k произвольны, эта последовательность сходится в $\mathcal{U}$.

Неравенство Харнака

Теорема 2.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, тогда для любой ограниченной подобласти $Q \Subset \Omega$ существует постоянная $C = C(\Omega, Q) > 0$, что для любой $u \in C^2(\Omega)$, неотрицательной гармонической функции, имеет место неравенство

$$\frac{\max_{\overline{Q}} u}{\min_{\overline{Q}} u} \leqslant C. \quad (2.2)$$

Carl Gustav Axel Harnack (1851 —1888)

Неравенство Харнака: доказательство

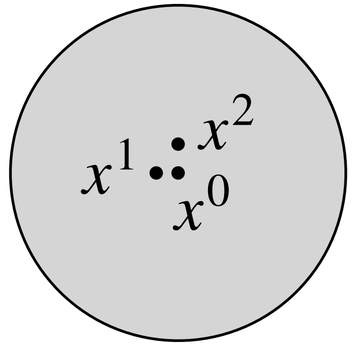
Доказательство. 1) Пусть $x^0 \in \Omega, B_{4R}\left(x^0\right) \Subset \Omega$. Тогда для любых двух точек $x^1, x^2 \in B_R\left(x^0\right)$ имеют место соотношения

$$u\left(x^1\right) = \frac{1}{\kappa_n R^n} \int\limits_{B_R\left(x^1\right)} u(x)dx \leqslant \frac{1}{\kappa_n R^n} \int\limits_{B_{2R}\left(x^0\right)} u(x)dx,$$

$$u\left(x^2\right) = \frac{1}{\kappa_n (3R)^n} \int\limits_{B_{3R}\left(x^2\right)} u(x)dx \geqslant \frac{1}{\kappa_n (3R)^n} \int\limits_{B_{2R}\left(x^0\right)} u(x)dx.$$

Отсюда имеем $u\left(x^1\right) \leqslant 3^n u\left(x^2\right)$, следовательно,

$$\max_{\overline{B}_R\left(x^0\right)} u \leqslant 3^n \min_{\overline{B}_R\left(x^0\right)} u.$$



Неравенство Харнака: доказательство

2) Пусть теперь $Q \Subset \Omega$. Выберем точки $x^1, x^2 \in \partial Q$, $u\left(x^1\right) = \max\limits_{\overline{Q}} u, u\left(x^2\right) = \min\limits_{\overline{Q}} u$. Соединим точки x^1 и x^2 кривой $\Gamma \subset \Omega$, возьмём такое положительное число R, что $4R < \operatorname{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$. Покроем Γ конечным числом N шаров радиуса R. Применим неравенство, получим на предыдущем шаге, к каждому шару, получим оценку $u\left(x^1\right) \leqslant 3^{nN} u\left(x^2\right)$. Итак, неравенство (2.2) доказано с константой $C = 3^{nN}$.

Аналитичность гармонических функций

Определение. Функция u в области Ω называется *аналитической*, если в некоторой окрестности любой точки $x^0 \in \Omega$ её можно представить в виде сходящегося степенного ряда относительно $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$.

В теории функций одной комплексной переменной доказывается, что голоморфная (комплексно дифференцируемая) функция f в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ допускает разложение Тейлора в окрестности любой точки Ω. Но вспомним, что $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ — гармонические функции…

Теорема 2.4. Гармоническая в Ω функция u — аналитическая в Ω функция.

Аналитичность гармонических функций: доказательство

Доказательство. Пусть u — гармоническая в Ω функция, тогда она бесконечно дифференцируема в Ω (по теореме 2.1). Рассмотрим $x^0 \in \Omega$, и пусть положительный радиус ρ таков, что $B_{2\rho}\left(x^0\right) \subset \Omega$. Для $x \in B_\rho\left(x^0\right)$ запишем формулу Тейлора:

$$u(x) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u\left(x^0\right)\left(x - x^0\right)^\alpha + R_m\left(x; x^0\right),$$

R_m — остаточный член. Функция u представляется рядом Тейлора $\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u\left(x^0\right)\left(x - x^0\right)^\alpha$ в окрестности x^0, если и только если существует $\varepsilon > 0$ и $R_m \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно по $x \in \overline{B}_\varepsilon\left(x^0\right)$. Представим остаточный член в форме Лагранжа:

Аналитичность гармонических функций: доказательство

$$R_m\left(x;x^0\right)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha u\left(x'\right)\left(x-x^0\right)^\alpha. \quad (2.3)$$

Здесь $x'=(1-t)x^0+tx, t\in(0,1)$. Из теоремы 2.2 следует неравенство $\left|D^\alpha u\left(x'\right)\right|\leqslant\left(\frac{nm}{\rho}\right)^m\max_{\overline{B}_{2\rho}\left(x^0\right)}|u|$. Кроме этого неравенства, для оценки остаточного члена (2.3) нам потребуется тождество с мультиномиальными коэффициентами $\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}=n^m$ и неравенство Стирлинга $m!\geqslant\left(\frac{m}{e}\right)^m$;

вместе они дают неравенство $\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\leqslant\left(\frac{ne}{m}\right)^m$. Имеем

Аналитичность гармонических функций: доказательство

$$\left|R_m\left(x;x^0\right)\right| \leqslant \left(\frac{nm}{\rho}\right)^m \max_{\overline{B}_{2\rho}\left(x^0\right)} |u| \left|x-x^0\right|^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \leqslant \left(n^2 \left|x-x^0\right| e\rho^{-1}\right)^m \max_{\overline{B}_{2\rho}\left(x^0\right)} |u|.$$

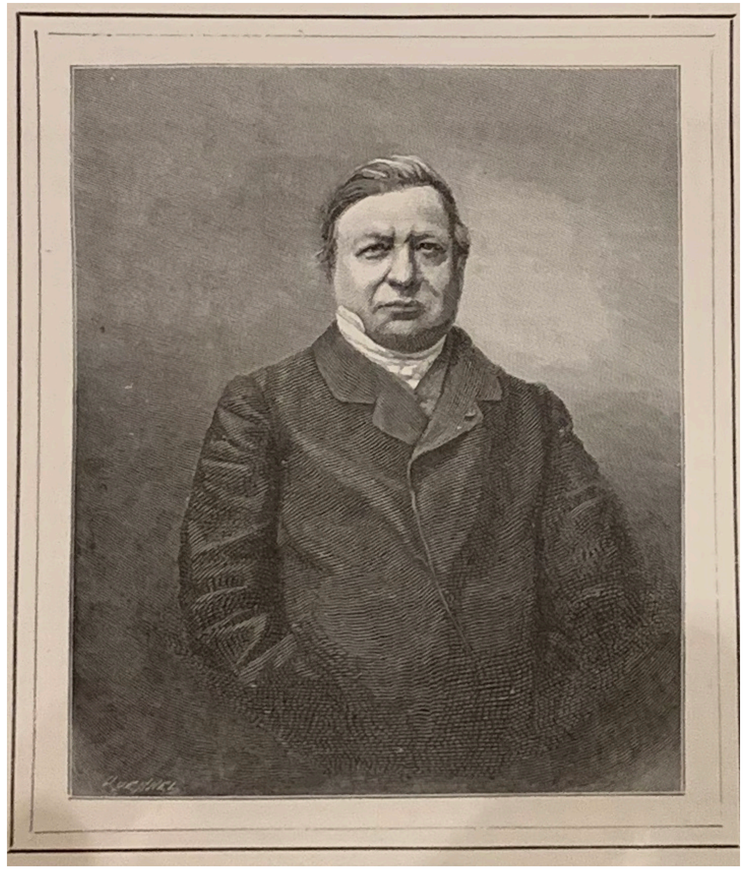
Тогда возьмём $\varepsilon < \dfrac{\rho}{n^2 e}$ и получим: $R_m\left(x, x^0\right) \to 0$ при $m \to \infty$, равномерно по $x \in \overline{B}_\varepsilon\left(x^0\right)$, что и требовалось для аналитичности функции u.

Теорема Лиувилля для гармонических функций

Теорема 2.5. Пусть u — гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция, существуют такие константы $m \geqslant 0, C \geqslant 0$, что при любом $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|u(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^m\right). \quad (2.4)$$

Тогда u — многочлен относительно $x_1, \ldots, x_n$ и $\deg u \leqslant [m]$.



Joseph Liouville (1809 — 1882)

Теорема Лиувилля для гармонических функций: доказательство

Доказательство. Рассмотрим шары $B_{R+\rho}(0)$ и $B_R(0)$, где $R > 0, \rho > 0$. Пусть $k = [m] + 1$, $|\alpha| = k$. Априорная оценка даёт $\max\limits_{\overline{B}_R(0)} \left|D^\alpha u\right| \leqslant$

$$\leqslant \left(\frac{nk}{\rho}\right)^k \max_{\overline{B}_{R+\rho}(0)} |u| \leqslant (nk)^k \rho^{-k} C \left(1 + |R+\rho|^m\right).$$ Т.к. $k > m$, то при $\rho \to +\infty$ и фиксированном R правая часть в последнем неравенстве стремится к нулю. Следовательно, при любом $R > 0$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = [m] + 1$, имеем $\max\limits_{\overline{B}_R(0)} \left|D^\alpha u\right| = 0$, т.е. $D^\alpha u = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Но это и означает, что u — многочлен степени не больше, чем $[m]$, ч. и т. д.

Теорема об устранимой особенности

Теорема 2.6. Пусть u — гармоническая функция в $\Omega\backslash\{x^0\}$, где $x^0 \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Рассмотрим функцию $M(\rho) = \max\limits_{S_\rho(x^0)} |u|$ и

предположим, что

$$M(\rho) \leqslant |\mathscr{E}(\rho)|a(\rho), \quad (2.5)$$

причём $a(\rho) \to 0$ при $\rho \to +0$ ($M(\rho) = o\left(\mathscr{E}(\rho)\right), \rho \to +0$). Тогда особенность в точке x^0 устранима, т.е. существует гармоническое продолжение функции u в точку x^0.

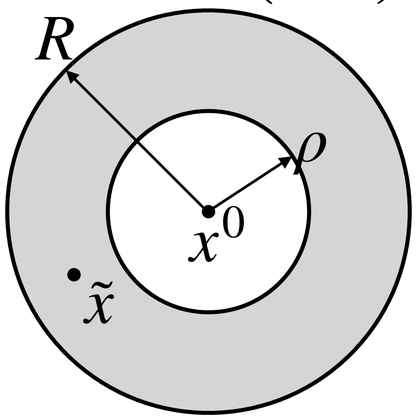
Доказательство. Пусть $\rho \in (0,R)$, $B_R\left(x^0\right) \Subset \Omega$. Применим формулу интегрального представления для функции u в области $B_R\left(x^0\right)\backslash B_\rho\left(x^0\right)$.

Теорема об устранимой особенности: доказательство

Для любой точки $\tilde{x} \in B_R\left(x^0\right) \backslash \overline{B}_\rho\left(x^0\right)$ имеем $(E = E(\tilde{x} - x))$

$$u(\tilde{x}) = \int_{S_R\left(x^0\right)} \left(u \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} - E \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) ds + \int_{S_\rho\left(x^0\right)} \left(u \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}'} - E \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}'} \right) ds, \quad (2.6)$$

где $\vec{\nu}$ — внешняя нормаль к $S_R\left(x^0\right)$, $\vec{\nu}'$ — внутренняя нормаль к $S_\rho\left(x^0\right)$. Можно показать, что второй интеграл в равенстве (2.6) стремится к нулю при $\rho \to +0$. Тогда функцию u можно продолжить до гармонической функции в Ω, определив её в точке x^0 значением первого интеграла в (2.6) при $\tilde{x} = x^0$.



Содержание

1. Качественная теория гармонических функций

2. Разрешимость краевых задач

Формула Пуассона

Теорема 2.7. $B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\right\}$ — шар с радиусом R, $\partial B_R = S_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R\right\}$ — граничная сфера, $\varphi \in C\left(S_R\right)$. Тогда функция $u(x) =$

$$= \int_{S_R} \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_{n-1} R} \frac{\varphi(y) ds}{\left|x - y\right|^n}, \quad (2.7)$$

$x \in B_R$, принадлежащая $C^\infty\left(B_R\right) \cap C\left(\overline{B}_R\right)$, есть классическое решение задачи Дирихле (1.14) в шаре.

Siméon Denis Poisson (1781 —1840)

Формула Пуассона: доказательство

2) Пусть $\varphi(x) \equiv 1$; обозначим $K\left(y, x\right) = \dfrac{R^2 - |x|^2}{\omega_{n-1} R \left|x - y\right|^n}$ —

ядро Пуассона, тогда для всех $x \in B_R$ интеграл

$\int\limits_{S_R} K\left(y, x\right) ds = 1$ (см. пред. презентацию «Функция Грина»).

3) Пусть теперь $\varphi \in C\left(S_R\right), x^0 \in S_R, \varepsilon$ — произвольное положительное число. Найдём такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\left|\varphi(y) - \varphi\left(x^0\right)\right| < \varepsilon$, если $y \in S_R$, $\left|y - x^0\right| < \delta$.

Формула Пуассона: доказательство

Пусть $M = \max\limits_{S_R} |\varphi|$. Теперь возьмём $x \in B_R$, $\left|x - x^0\right| < \mu < \delta$,

$R - \varepsilon(\delta - \mu)^n < |x| < R$ и рассмотрим оценку: $\left|u(x) - \varphi\left(x^0\right)\right| \leqslant$

$$= \left| \int_{S_R} K\left(y, x\right)\left(\varphi(y) - \varphi\left(x^0\right)\right) ds \right| \leqslant \int_{S_R \cap B_\delta\left(x^0\right)} K\left(y, x\right) \left|\varphi(y) - \varphi\left(x^0\right)\right| ds +$$

$$+ \int_{S_R \setminus B_\delta\left(x^0\right)} K\left(y, x\right) \left|\varphi(y) - \varphi\left(x^0\right)\right| ds \leqslant \varepsilon + 2M \frac{2R\left(R - |x|\right)\omega_{n-1}R^{n-1}}{\omega_{n-1}R(\delta - \mu)^n} \leqslant$$

$\leqslant \varepsilon\left(1 + 4MR^{n-1}\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Итак, u непрерывна в точке x^0

$\Rightarrow u \in C\left(\overline{B}_R\right), u\big|_{S_R} = \varphi$, ч. и т.д.

Обратная теорема о среднем

Для доказательства утверждений о сходимости последовательностей гармонических функций нам будет нужен один критерий гармоничности непрерывной функции.

Теорема 2.8. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C(\Omega)$ и для любой сферы $S_R\left(x^0\right) \subset \Omega$ выполнено свойство среднего

$$u\left(x^0\right) = \frac{1}{\omega_{n-1} R^{n-1}} \int_{S_R\left(x^0\right)} u(x) ds. \quad (2.8)$$

Тогда $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω.

Доказательство. Пусть $\varphi = u\big|_{S_R\left(x^0\right)}$. Применим формулу Пуассона:

Обратная теорема о среднем: доказательство

$$v(x) = \frac{R^2 - \left|x - x^0\right|^2}{\omega_{n-1} R^{n-1}} \int_{S_R(x^0)} \frac{\varphi(y)ds}{\left|x - x^0 - y\right|^n}. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) даёт гармоническую в шаре $B_R\left(x^0\right)$ функцию v, удовлетворяющую условию Дирихле $v\big|_{S_R(x^0)} = \varphi$. Функция $w = u - v$ также удовлетворяет условию среднего вида (2.8) для сферы $S_R\left(x^0\right)$.

Из свойства среднего по сфере легко следует свойство среднего по шару (см. доказательство теоремы 2.2).

Обратная теорема о среднем: доказательство

Бросим взгляд на доказательство принципа максимума (теоремы 2.3). Оно использует только то обстоятельство, что гармоническая функция удовлетворяет свойству среднего по шару. И больше ничего! Поэтому принцип максимума распространяется на все функции со свойством среднего, в частности, на функцию $w = u - v$. Из него следует, что функция w достигает свой максимум и минимум на $S_R\left(x^0\right)$. Поэтому $w = 0$, т.е. $u = v$ в $B_R\left(x^0\right)$. Теорема 2.8 доказана.

Итак, свойство среднего есть критерий гармоничности непрерывной функции. Из него немедленно следует важный результат о сходимости последовательности гармонических функций.

Теорема Вейерштрасса

Теорема 2.9. Пусть последовательность гармонических функций $\left\{u_k : \Omega \to \mathbb{R}\right\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на любом компакте $K \subset \Omega$.

Тогда её предел есть гармоническая функция.

Замечание. Последовательность $\left\{u_k : \Omega \to \mathbb{R}\right\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на компакте $K \subset \Omega$ к функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (пишут $u_k \rightrightarrows u$, $k \to \infty$, на K), если $\max\limits_{x \in K} \left|u_k(x) - u(x)\right| = \|u_k - u\|_K \to 0$ при $k \to \infty$.

Идея доказательства теоремы 2.9: в силу равномерной сходимости возможен предельный переход в формуле (2.8). Поэтому предел будет гармонической функцией.

Непрерывные субгармонические и супергармонические функции

Определение 2.2. Функция $u \in C(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область) называется: а) *субгармонической*, если для любого шара $B \Subset \Omega$ и любой функции $h \in C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$, гармонической в B и удовлетворяющей неравенству $u \leqslant h$ на ∂B, имеет место неравенство $u \leqslant h$ в B; а) *супергармонической*, если для любого шара $B \Subset \Omega$ и любой функции $h \in C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$, гармонической в B и удовлетворяющей неравенству $u \geqslant h$ на ∂B, имеет место неравенство $u \geqslant h$ в B.

Наблюдение: непрерывные субгармонические (супергармонические) функции удовлетворяют принципу максимума (минимума).

Непрерывные субгармонические и супергармонические функции

Определение 2.3. Функция $u \in C(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область) называется: а) *субгармонической*, если для любой сферы $S_R\left(x^0\right) \Subset \Omega$ выполнено неравенство

$$u\left(x^0\right) \leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}R^{n-1}} \int_{S_R\left(x^0\right)} u(x)ds;$$

а) *супергармонической*, если для любой сферы $S_R\left(x^0\right) \Subset \Omega$ выполнено неравенство

$$u\left(x^0\right) \geqslant \frac{1}{\omega_{n-1}R^{n-1}} \int_{S_R\left(x^0\right)} u(x)ds.$$

Свойства субгармонических и супергармонических функций

- Если $\Delta u \geqslant 0$ ($\Delta u \leqslant 0$) в Ω, то u — субгармоническая (супергармоническая) функция в смысле определения 2.3.
- Если $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ — субгармоническая функция, $v \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ — супергармоническая функция, $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$, то либо $u < v$ в Ω, либо $u = v$ в Ω.
- Пусть $u \in C(\Omega)$ — субгармоническая функция в Ω, $B \Subset \Omega$ — шар. Рассмотрим для B гармоническую функцию $\overline{u}$, задаваемую интегралом Пуассона с граничной функцией $\varphi = u\big|_{\partial B}$.

Свойства субгармонических и супергармонических функций

Определим *гармоническую срезку* по формуле

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), x \in B, \\ u(x), x \in \Omega \backslash B\,. \end{cases}$$

Тогда гармоническая срезка субгармонической функции — снова субгармоническая функция.

- Пусть $u_1, \ldots, u_N$ — субгармонические функции в Ω. Тогда функция $u = \max\left\{u_1, \ldots, u_N\right\}$ — тоже субгармоническая в Ω.

Замечание. Соответствующие результаты для супергармонических функций получаются заменой в функции u на $-u$, максимума — на минимум.

Субрешения и суперрешения. Решение Перрона

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на границе.

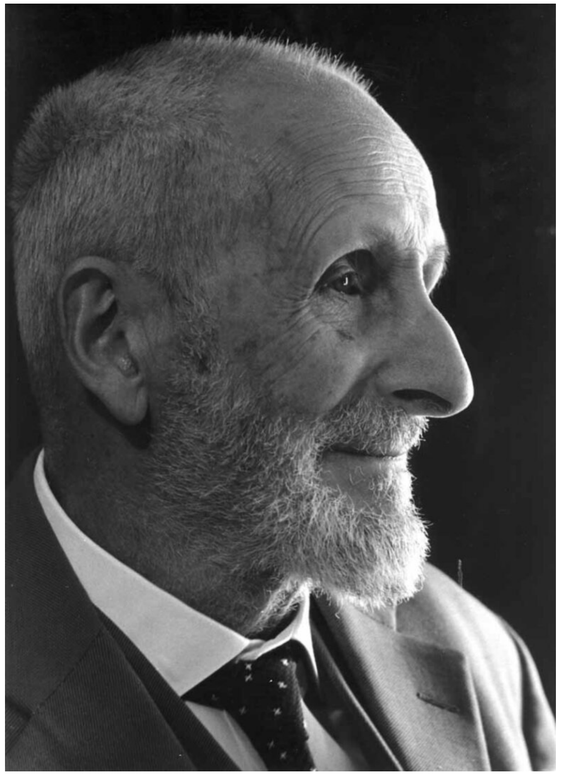
Определение 2.4. 1) Непрерывная в $\overline{\Omega}$ субгармоническая функция u называется *субрешением* относительно (для) φ, если она удовлетворяет неравенству $u \leqslant \varphi$ на $\partial\Omega$. 2) Непрерывная в $\overline{\Omega}$ супергармоническая функция u называется *суперрешением* относительно (для) φ, если она удовлетворяет неравенству $u \geqslant \varphi$ на $\partial\Omega$. 3) Пусть S_φ — множество всех субрешений относительно функции φ. Тогда функция $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\varphi} v(x)$, $x \in \Omega$, называется *решением Перрона* внутренней задачи Дирихле (1.14) для уравнения Лапласа в области Ω с граничной функцией φ.

Теорема Перрона

Теорема 2.10. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда решение Перрона u относительно φ существует и $\Delta u = 0$ в Ω.

Замечание. Множество $S_\varphi \neq \varnothing$, так как существует $v_0 \equiv \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$ — субрешение.

По принципу максимума любое субрешение $v \in S_\varphi$ ограничено сверху величиной $\sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$.



Oskar Perron (1880 —1975)

Теорема Арцела

Определение. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $C(K)$ — банахово пространство функций, непрерывных на компакте K. Семейство $\mathscr{F} \subset C(K)$ называется: а) *равномерно ограниченным*, если существует константа $C \geqslant 0$, что для всех $f \in \mathscr{F}$ и $x \in K$ $|f(x)| \leqslant C$; б) *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $f \in \mathscr{F}, x^1, x^2 \in K$, таких, что $\left|x^1 - x^2\right| < \delta$, $\left|f\left(x^1\right) - f\left(x^2\right)\right| < \varepsilon$; в) *нормальным (предкомпактным)*, если для любой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ существует подпоследовательность $\left\{f_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся на K.

Теорема Арцела. Семейство $\mathscr{F} \subset C(K)$ нормальное $\Leftrightarrow$ оно равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное.

Теорема Перрона: доказательство

Доказательство. 1) Непрерывные субгармонические функции удовлетворяют принципу максимума $\Rightarrow$ любая функция $v \in S_\varphi$ удовлетворяет неравенству $v \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi \Rightarrow$ решение Перрона определено в Ω.

2) Пусть $x^0 \in \Omega$. По определению решения Перрона существует такая последовательность $\left\{v_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset S_\varphi$, что $v_k\left(x^0\right) \to u\left(x^0\right)$, $k \to \infty$. Скорректируем последовательность: $\tilde{v}_k = \max\left(v_k, \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi\right)$.

Последовательность $\{\tilde{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет ограниченной.

Теорема Перрона: лемма о сходимости

3) Выберем шар $B_R\left(x^0\right) \Subset \Omega$ и обозначим через V_k гармоническую срезку $\tilde{v}_k$ относительно $B_R\left(x^0\right)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ $V_k \in S_\varphi$.

Далее нам потребует одна лемма.

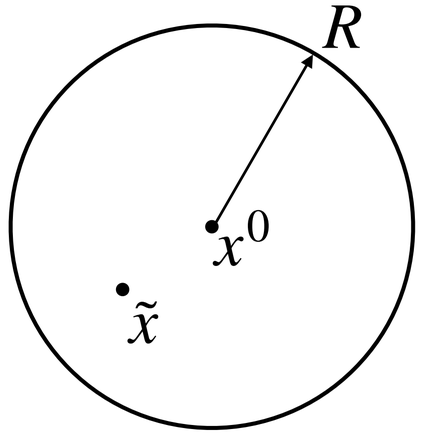
Лемма 2.1. Пусть $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченная последовательность гармонических функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует подпоследовательность $\left\{V_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ $(1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots)$, которая равномерно сходится на компактных подмножествах в Ω.

Доказательство леммы 2.1 основано на априорной оценке (2.1) и теореме Арцела (подробности см. https://baikov.org/pdebook2).

Теорема Перрона: доказательство

4) По лемме 2.1 и по теореме Вейерштрасса 2.9 последовательность $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ содержит подпоследовательность $\{V_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, равномерно сходящуюся в любом шаре $\overline{B}_\rho\left(x^0\right), \rho < R$, к гармонической в шаре $B_R\left(x^0\right)$ функции V. Очевидно, что $V \leqslant u$ в $B_R\left(x^0\right)$ и $V\left(x^0\right) = u\left(x^0\right)$. Покажем, что на самом деле $V = u$ в $B_R\left(x^0\right)$.

5) Предположим, что $V(\tilde{x}) < u(\tilde{x})$ в некоторой точке $\tilde{x} \in B_R\left(x^0\right)$. Тогда существует такая функция $w \in S_\varphi$, что $V(\tilde{x}) < w(\tilde{x})$. Положим $w_j = \max\left(w, V_{k_j}\right)$.



Теорема Перрона: доказательство

Возьмём гармоническую срезку W_j функции w_j и, как в пункте 4), получим подпоследовательность последовательности $\left\{ W_j \right\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся к гармонической функции W, удовлетворяющей неравенству $V \leqslant W \leqslant u$ в $B_R\left(x^0\right)$, причём $V\left(x^0\right) = W\left(x^0\right) = u\left(x^0\right)$. Но тогда в силу принципа максимума должно выполняться равенство $V = W$ в $B_R\left(x^0\right)$, что противоречит выбору $w \in S_\varphi$. Таким образом, $V = u$ в $B_R\left(x^0\right)$, теорема 2.10 доказана.

Барьеры и локальные барьеры

Непрерывное достижение решения Перрона заданной граничной функции сильно зависит от границы области и изучаются *методом барьерных функций*.

Определение 2.5. Пусть $\xi \in \partial\Omega$. Функция $w \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ называется *барьером* в граничной точке ξ, если

(i) w — супергармоническая функция в Ω;

(ii) $w > 0$ в $\overline{\Omega}\backslash\{\xi\}$; $w(\xi) = 0$.

Локальным барьером в точке ξ называется функция $w \in C\left(\overline{Q}\right)$, где $Q = \Omega \cap N(\xi)$, где $N(\xi)$ — окрестность точки ξ, удовлетворяющая пунктам (i) и (ii) для Q.

Барьеры и локальные барьеры

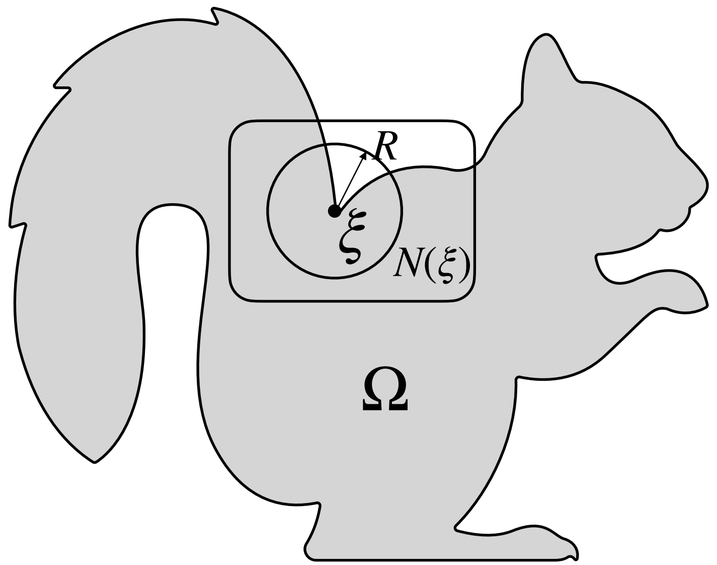
Пусть $w \in C\left(\overline{Q}\right)$ — локальный барьер в точке $\xi \in \partial\Omega$.

Рассмотрим шар $B_R(\xi) \Subset N(\xi)$, и пусть $m = \inf\limits_{N(\xi)\setminus B_R(\xi)} w > 0$.

Тогда функция

$$W(x) = \begin{cases} \min\left(m, w(x)\right), x \in \overline{\Omega} \cap B_R(\xi), \\ m, x \in \overline{\Omega}\setminus B_R(\xi) \end{cases}$$

есть (глобальный) барьер в точке ξ.



Регулярные точки и границы. Лемма о регулярности

Определение 2.16. Граничная точка называется *регулярной*, если в этой точке существует барьер. Граница $\partial\Omega$ области Ω *регулярна*, если все её точки регулярны.

Лемма 2.4 (лемма о регулярности). Пусть u — решение Перрона внутренней задачи Дирихле (2.14) в области Ω с граничной функцией φ. Если $\xi \in \partial\Omega$ — регулярная точка, φ непрерывна в ξ, то $u(x) \to \varphi(\xi)$ при $\Omega \ni x \to \xi$.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{\partial\Omega} |\varphi|$, $\varepsilon > 0$, w — барьер в точке ξ. Тогда существуют такие постоянные $\delta > 0, k > 0$, что

Лемма о регулярности: доказательство

для $x \in B_\delta(\xi) \cap \partial\Omega$ $\left|\varphi(x) - \varphi(\xi)\right| < \varepsilon$, а для $x \in \overline{\Omega}\backslash B_\delta(\xi)$
$w(x) \geqslant \dfrac{2M}{k}$. Имеем: $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$ — суперрешение для φ,
$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ — субрешение для φ; отсюда следует, что

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leqslant u(x) \leqslant \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$

(использовано определение решения Перрона и тот факт, что суперрешение, превосходящее субрешение на границе, превосходит его в области). Но тогда $\left|u(x) - \varphi(\xi)\right| < \varepsilon + kw(x)$ и, поскольку $w(x) \to 0$ при $\Omega \ni x \to \xi$, $\lim\limits_{\Omega \ni x \to \xi} u(x) = \varphi(\xi)$, ч и т.д.

Критерий разрешимости задачи Дирихле

Вновь рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω с граничной функцией φ:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \qquad (1.14)$$

Классическое решение задачи Дирихле (1.14) — это функция $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, которая при подстановке в задачу (1.14) обращает уравнение Лапласа и условие Дирихле в тождества. Необходимое условие $\exists$ классического решения: $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Теорема 2.11. Задача (1.14) разрешима для любых непрерывных граничных функций тогда и только тогда, когда граница $\partial\Omega$ регулярна.

Критерий разрешимости задачи Дирихле: доказательство

Другими словами,

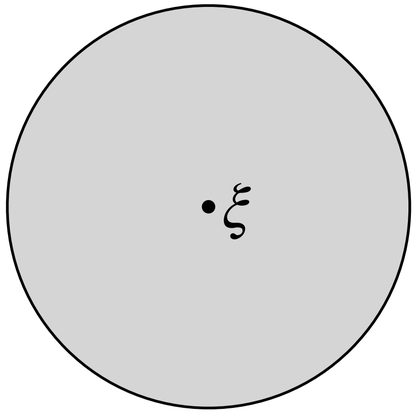
1) если $\partial\Omega$ регулярна, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, то $\exists u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ — классическое решение задачи (1.14);
2) если для любой $\varphi \in C(\partial\Omega)$ существует классическое решение задачи (1.14) (необходимое условие оказывается достаточным), то $\partial\Omega$ регулярна.

Доказательство. 1) следует из теоремы Перрона и леммы о регулярности. 2) Гармоническая функция $w \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, которая является решение задачи Дирихле с граничной функцией $\varphi(x) = |x - \xi|$, $\xi \in \partial\Omega$, будет, очевидно, барьером в точке $\xi \in \partial\Omega$. Теорема 2.11 доказана.

Достаточные условия регулярности границ ($n = 2$)

Утверждение 2.2. Граница области $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$ регулярна, если для любой точки $\xi \in \partial\Omega$ существует *кривая Жордана* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$ с началом в точке ξ.

Локальный барьер в точке ξ имеет вид (в комплексных обозначениях) $w = -\operatorname{Re}\dfrac{1}{\ln(z-\xi)}$.

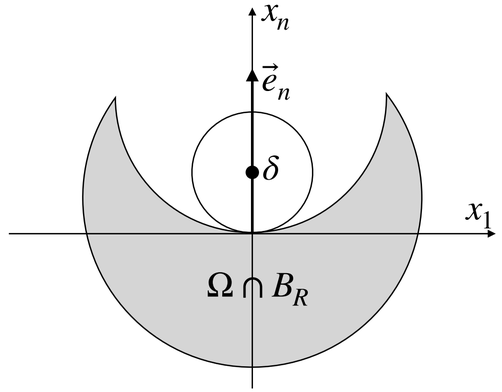


Пример области с рег. границей: единичный круг с разрезом вдоль радиуса.

Пример нерегулярной границы: круг с проколотым центром.

Достаточные условия регулярности границ ($n > 2$)

Утверждение 2.3 (условие внешнего конуса). Граница области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n, n > 2$, регулярна, если для любой точки $\xi \in \partial\Omega$ существует конечный прямой круговой конус K с вершиной в точке ξ, удовлетворяющий условию $\overline{K} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$.

Локальный барьер в точке ξ можно искать в виде
$w = r^\lambda v$, где $r = |x - \xi|$, λ зависит от угла конуса,
v — функция от координат на сфере.

Следствие: если $\partial\Omega \in C^2$, то $\partial\Omega$ регулярна.