Уравнения в частных производных

Функция Грина

А.Е. Байков
к.ф.-м.н., доцент каф. 802 МАИ
https://baikov.org/pde

Содержание

1. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Интегральное представление функций

2. Функция Грина задачи Дирихле

3. Функция Грина задачи Робена и задачи Неймана

Оператор Лапласа, уравнение Лапласа

- $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$; здесь

  $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\vec{e}_n$ — градиент функции $u = u(x)$,

  $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial a_n}{\partial x_n}$ — дивергенция векторного поля

  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n$.
- $\Delta u = 0$ — уравнение Лапласа, $\Delta u = f(x)$ — уравнение Пуассона.

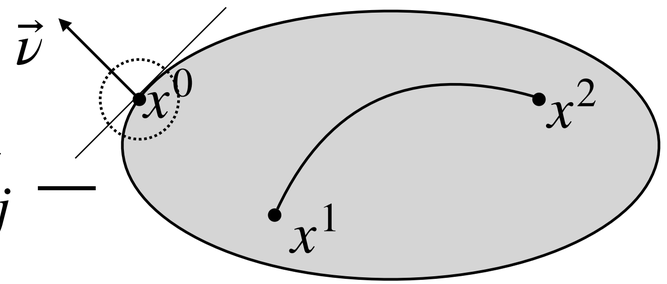
Гармонические функции. Области и границы

Определение 1.1. Пусть Ω — область. Частное классическое решение $u \in C^2(\Omega)$ уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области Ω называется *гармонической функцией*.

Определение 1.2. *Областью* в $\mathbb{R}^n$ называется всякое открытое линейно связное множество. *Границей* области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется множество всех её *граничных точек* (обозначение: $\partial\Omega$).

линейная связность $\Leftrightarrow$ топологическая связность для открытых множеств

$S \subset \mathbb{R}^n$: $S = S_1 \sqcup S_2, S_1, S_2 \neq \varnothing, S_j = S \cap U_j$ — НЕ топологически связное множество.



Классы границ

Определение 1.3. Пусть $k \in \mathbb{N}$ или $k = \infty$. Граница области Ω принадлежит классу C^k (пишут $\partial\Omega \in C^k$), если каждая точка $x^0 \in \partial\Omega$ допускает такую окрестность $U\left(x^0\right) \subset \mathbb{R}^n$, что кусок границы $U_{\partial\Omega}\left(x^0\right) = U\left(x^0\right) \cap \partial\Omega$ имеет представление $x_j = \varphi\left(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n\right)$, где x_j — одна из координат, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ есть k раз непрерывно дифференцируемая функция $(n-1)$-ой переменной на открытом множестве определения V.

Пример. $\Omega = \left\{x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}, \partial\Omega = \left\{x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}, x_2 = \pm\sqrt{1 - x_1^2}$, $x_1 = \pm\sqrt{1 - x_2^2} \Rightarrow \partial\Omega \in C^\infty$.

Классические функциональные пространства

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — замыкание области Ω. Следующие пространства относят к классическим:

- $C^k(\Omega)$ — пространство всех k раз непрерывно дифференцируемых функций в области Ω $(k < \infty)$; $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций в Ω;
- $C^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций в области Ω;
- $C^k\left(\overline{\Omega}\right) \subset C^k(\Omega)$ — подпространство в $C^k(\Omega)$ функций, допускающих непрерывное продолжение на $\partial\Omega$ вместе со всеми производными до k -го порядка включительно; $C^0\left(\overline{\Omega}\right) = C\left(\overline{\Omega}\right)$ — пространство всех непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций;

Пространство основных функций

- $C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) = \cap_{k=0}^{\infty} C^{k}\left(\overline{\Omega}\right)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых (гладких) функций в $\overline{\Omega}$.

Определение 1.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ — область. *Носитель* функции $u \in C(\Omega)$ есть замыкание множества точек, где функция не равна нулю: $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$. Функция $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ называется *финитной* в области Ω, если её носитель $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ и компактен.

- $C_{0}^{k}(\Omega)$ — пространство всех финитных k раз непрерывно дифференцируемых функций;
- $C_{0}^{\infty}(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых в области Ω функций или *пространство основных функций*.

Формула многомерного интегрирования по частям

Дадим многомерное обобщение хорошо известной формулы интегрирования по частям из математического анализа $\int_a^b uv'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v\,dx$, где $u, v \in C^1[a,b]$.

Пусть Ω — ограниченная область с границей класса C^1, $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\vec{\nu}$ — непрерывное поле единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$. Тогда для любого индекса $j = 1,\ldots,n$

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_j\,ds - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}v\,dx, \quad (1.1)$$

где ν_j — j-ая координата нормального вектора, ds — элемент гиперплощади. Формула (1.1) легко следует из формулы Гаусса—Остроградского $\int_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot\vec{\nu}\,ds = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\,dx$, где $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n$, $a_j \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $j = 1,\ldots,n$, если последнюю применить к векторному полю $\vec{a} = uv\vec{e}_j$.

Формулы Грина для оператора Лапласа

Из формулы интегрирования по частям следуют две формулы Грина для оператора Лапласа. Для функций $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ первая формула Грина

$$\int_\Omega u\Delta v\,dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}}\,ds - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx, \quad (1.2)$$

где $\dfrac{\partial v}{\partial\vec{\nu}} = \nabla v\cdot\vec{\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1 + \ldots + \dfrac{\partial v}{\partial x_n}\nu_n$ — нормальная производная, получается суммированием по $j = 1,\ldots,n$ соотношений $\displaystyle\int_\Omega u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\,dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_j}\nu_j\,ds - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx\,.$

Если в формуле (1.2) поменять функции u и v местами, а затем вычесть две первые формулы Грина друг из друга, получится вторая формула Грина для оператора Лапласа:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\right)ds. \quad (1.3)$$

Определение фундаментального решения оператора Лапласа

Определение 1.5. Фундаментальным решением оператора Лапласа называется функция $E \in L_{1,loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ (локально суммируемая $\Leftrightarrow$ интегрируемая в смысле Лебега по любому компакту из $\mathbb{R}^n$) с таким свойством, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ выполнено тождество

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} E(x)\Delta\varphi\, dx = \varphi(0). \quad (1.4)$$

Замечание. На языке обобщённых функций определение 1.5 сокращается: $\Delta E = \delta(x)$, где δ — дельта-функция Дирака. Фундаментальное решение не единственно!

Определение 1.6. Дельта-функцией Дирака называется линейный функционал $\delta : \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}$, действующий на основные функции по формуле $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. Линейность: $\delta\left(\lambda\varphi + \mu\psi\right) = \lambda\delta(\varphi) + \mu\delta(\psi)$.

Гармонические функции с радиальной симметрией

Рассмотрим уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в проколотом пространстве $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Найдём все его частные решения, зависящие от $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, т.е. радиально-симметричные решения: $u(x) = v\left(|x|\right) = v(r)$. Имеем:

- $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = \dfrac{dv}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x_j} = \dfrac{dv}{dr}\dfrac{2x_j}{2r} = \dfrac{dv}{dr}\dfrac{x_j}{r}$;
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{dv}{dr}\dfrac{x_j}{r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{dv}{dr}\right)\dfrac{x_j}{r} + \dfrac{dv}{dr}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{x_j}{r}\right) =$

  $= \dfrac{d^2v}{dr^2}\dfrac{x_j^2}{r^2} + \dfrac{dv}{dr}\dfrac{r - \frac{x_j}{r^2}}{r^2} = \dfrac{d^2v}{dr^2}\dfrac{x_j^2}{r^2} + \dfrac{dv}{dr} - \dfrac{dv}{dr}\dfrac{x_j^2}{r^3}$;
- $\Delta u = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \dfrac{d^2v}{dr^2} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{dv}{dr}$.

Гармонические функции с радиальной симметрией

Функция $v = v(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dv}{dr} = 0$. Пусть $w = \frac{dv}{dr}$, тогда $\frac{dw}{dr} + \frac{n-1}{r}w = 0 \Rightarrow$ $\frac{dw}{w} = (1-n)\frac{dr}{r} \Rightarrow w = Cr^{1-n}$. Отсюда $v = C_1 \ln r + C_2$ при $n = 2$, где $C_1 = C$, $v = C_1 r^{2-n} + C_2$ при $n > 2$, где $C_1 = \frac{C}{2-n}$. Здесь C_1, C_2 — произвольные независимые константы.

Если существует радиально-симметричное фундаментальное решение оператора Лапласа, то оно имеет вид $E(x) = C_1 \ln|x|$ $(n = 2)$ или $E(x) = C_1(n)|x|^{2-n}$ $(n > 2)$. $C_1 = ?$

Фундаментальное решение оператора Лапласа

Утверждение 1.1. Функция

$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|}, n = 2, \\ -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{|x|}, n = 3, \\ -\dfrac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, n > 2, \end{cases}$$

где ω_{n-1} — гиперплощадь ($(n-1)$-мерный объём) гиперсферы $\mathbb{S}^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \right\}$, есть фундаментальное решение оператора Лапласа в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Гиперплощадь единичной гиперсферы

Вычислим ω_{n-1}. Имеем $\pi^{\frac{n}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}$

$e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2} dx_1 \dots dx_n = \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr \int_{S_r} ds = \omega_{n-1} \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr =$

$= \frac{1}{2} \omega_{n-1} \Gamma(n/2) \Rightarrow \omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}$. Здесь $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ —

знаменитая гамма-функция Эйлера. Т.к. $\Gamma(k) = (k-1)!$,

$\Gamma(k + 1/2) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}$, имеем $\omega_{2k-1} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}$, $\omega_{2k} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k-1)!!}$.

$\mathbb{S}^3 = \overline{B}^3 / \mathbb{S}^2$. Другое представление: *расслоение Хопфа*.

Свойства фундаментального решения оператора Лапласа

1) $E(x) = \mathscr{E}(|x|)$, где $\mathscr{E}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \ln r$, если $n = 2$,

$$\mathscr{E}(r) = -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}}, \text{ если } n > 2;$$

2) $E \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}\right)$;

3) $\Delta E = 0$ в $|x| > 0$;

4) $E \in L_{1,loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Доказательство утверждения 1.1. Нужно доказать, что для любой $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(x)\Delta\varphi \, dx = \varphi(0)$.

Доказательство утверждения 1.1

Локальная суммируемость функции E позволяет записать

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x)\Delta\varphi\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} E(x)\Delta\varphi\,dx,$$

где $B_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\right\}$ — шар с центром в начале и радиусом ε.

Применим вторую формулу Грина, учитывая финитность функции φ:

$$\int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} E(x)\Delta\varphi(x)\,dx - \int\limits_{B_R\setminus B_\varepsilon} \Delta E(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{S_\varepsilon} \left(E\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\nu}'} - \varphi\frac{\partial E}{\partial\vec{\nu}'}\right) ds. \quad (1.5)$$

Здесь $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \varepsilon\right\}$ — сфера с центром в начале координат и радиусом ε, $\vec{\nu}'$ — единичная внутренняя нормаль к S_ε.

Доказательство утверждения 1.1

Интеграл по $\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon$ в правой части (1.5) равен нулю, потому что E — гармоническая функция в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon} E \Delta \varphi dx = \int_{S_\varepsilon} E \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}'} ds - \int_{S_\varepsilon} \varphi \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}'} ds. \quad (1.6)$$

Оценим первый интеграл в правой части равенства (1.6):

$$\left| \int_{S_\varepsilon} E \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}'} ds \right| \leqslant |\mathscr{E}(\varepsilon)| \int_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}'} \right| ds \leqslant |\mathscr{E}(\varepsilon)| \omega_{n-1} \varepsilon^{n-1} \max_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}'} \right| \leqslant C_\varphi \varepsilon^{n-1} |\mathscr{E}(\varepsilon)|.$$

Мы видим, что $\int_{S_\varepsilon} E \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}'} ds \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (константа C_φ зависит от φ, но не от ε).

Доказательство утверждения 1.1

Рассмотрим предел от второго интеграла в правой части равенства (1.6):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{S_\varepsilon}\varphi\frac{\partial E}{\partial\vec{\nu}'}\,ds\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_{n-1}}\int_{S_\varepsilon}\varphi\,ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_{n-1}}\varphi\left(\xi_\varepsilon\right)\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi\left(\xi_\varepsilon\right),$$

где $\xi_\varepsilon\in S_\varepsilon$ (теорема о среднем для интеграла). Но $\xi_\varepsilon\to 0$, если $\varepsilon\to 0$,

поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(-\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\frac{\partial E}{\partial\vec{\nu}'}\,ds\right)=\varphi(0)$, следовательно

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x)\Delta\varphi\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon}E(x)\Delta\varphi\,dx=\varphi(0).$$

Утверждение 1.1 доказано.

Интегральное представление функций

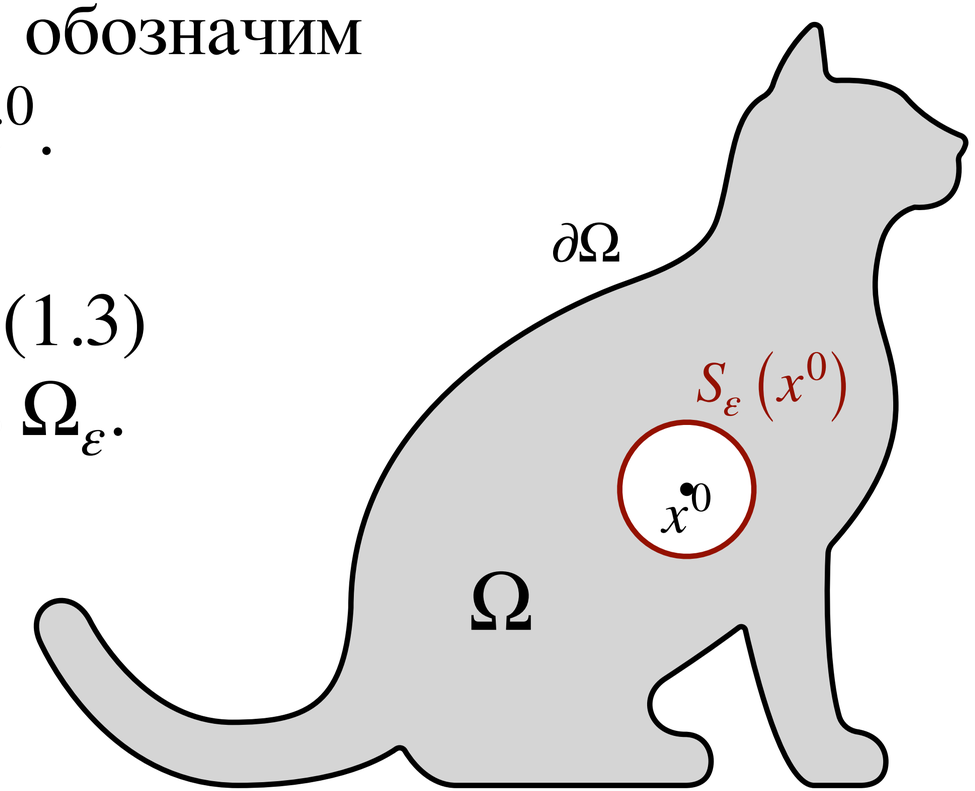
Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ (ограниченная область), $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $B_\varepsilon\left(x^0\right) \Subset \Omega$. Через $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon\left(x^0\right)$ обозначим ε-перфорацию области Ω в точке x^0.

Имеем $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \sqcup S_\varepsilon\left(x^0\right)$.

Применим вторую формулу Грина (1.3) к функциям u и $v(x) = E\left(x - x^0\right)$ в Ω_ε.

Замечание. Для любой $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} E\left(x - x^0\right) \varphi(x)\, dx = \varphi\left(x^0\right).$$



Интегральное представление функций

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} u(x)\Delta E\left(x - x^0\right)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} - E\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) ds + \int_{S_\varepsilon\left(x^0\right)} \left(u\frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}'} - E\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}'} \right) ds +$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} E\left(x - x^0\right) \Delta u(x)\, dx, \quad (1.7)$$

где $\vec{\nu}'$ — внутренняя нормаль к $S_\varepsilon\left(x^0\right)$. Рассуждая как при доказательстве утверждения 2.1, можно убедиться, что при $\varepsilon \to 0$ интеграл по $S_\varepsilon\left(x^0\right)$ стремится к $-u\left(x^0\right)$. Тогда предельный переход $\varepsilon \to 0$ в (1.7) даёт формулу интегрального представления функций.

Интегральное представление функций

Утверждение 1.2. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, тогда для любой функции $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ в любой точке $x^0 \in \Omega$ верна формула интегрального представления

$$u\left(x^0\right) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}E\left(x - x^0\right)ds + \int_{\partial\Omega} E\left(x - x^0\right)\left(-\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\right)ds + \int_{\Omega} E\left(x - x^0\right)\Delta u(x)\,dx.$$

В частности, пусть $\Delta u = 0$ в Ω; $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \Leftrightarrow u(x) = \varphi(x), x \in \partial\Omega$;

$$-\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\bigg|_{\partial\Omega} = \psi \Leftrightarrow -\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}} = \psi(x), x \in \partial\Omega.\ E\left(x - x^0\right) = -\frac{1}{4\pi\left|x - x^0\right|}.$$

Уравнение Пуассона $\Delta u = -4\pi\rho_0(x)$.

Проблема общего решения уравнения Лапласа

Тогда формула интегрального представления гармонической функции имеет вид

$$u\left(x^0\right) = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x)\frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} ds + \int\limits_{\partial\Omega} \psi(x) E\left(x - x^0\right) ds. \quad (1.8)$$

Однако формула (1.8) не даёт общее решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области Ω из функционального пространства $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, потому что функции φ и ψ в этой формуле зависят друг от друга!

Содержание

1. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Интегральное представление функций

2. Функция Грина задачи Дирихле

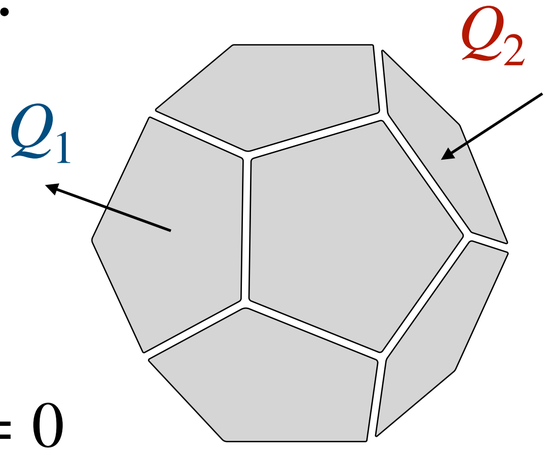
3. Функция Грина задачи Робена и задачи Неймана

Лемма о потоке тепла

Простое наблюдение. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ — гармоническая в Ω функция. Тогда $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} ds = 0.$

Действительно, применим вторую формулу Грина для u и тождественной единицы: $0 = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} ds.$

Физический смысл леммы о потоке тепла:
при стационарном распределении температуры внутри ограниченной области Ω поток тепла через её поверхность равен нулю. $Q_1 + Q_2 = 0$



Гармонические, субгармонические, супергармонические функции

Определение 1.7. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ называется *гармонической* функцией, решение неравенства $\Delta u \geqslant 0$ — *субгармонической* функцией, решение неравенства $\Delta u \leqslant 0$ — *супергармонической* функцией.

Сосредоточимся на субгармонических функциях (соответствующие результаты о супергармонических и гармонических функциях будут простыми следствиями утверждений о первых). Отметим сначала один простой факт: если $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ — субгармоническая в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ с границей класса C^1, то из второй формулы Грина вытекает неравенство

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} ds \geqslant 0.$$

Теорема о среднем по сфере

Теорема 1.1 (о среднем по сфере). Пусть $B_R\left(x^0\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<R\right\}, S_R\left(x^0\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=R\right\}$, $u\in C^2\left(B_R\left(x^0\right)\right)\cap C\left(\overline{B}_R\left(x^0\right)\right)$ — субгармоническая функция. Тогда

$$u\left(x^0\right)\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}R^{n-1}}\int\limits_{S_R\left(x^0\right)}u(x)ds. \quad (1.9)$$

Доказательство. Пусть $0<\rho<R$. Фундаментальное решение можно модифицировать, положив $\tilde{E}\left(x-x^0\right)=E\left(x-x^0\right)+C$, так, чтобы $\tilde{E}<0$ для всех $x\in B_\rho\left(x^0\right)$, и $\tilde{E}=0$, если $x\in S_\rho\left(x^0\right)$ (найдите выражение для константы C).

Теорема о среднем по сфере: доказательство

Для модифицированного фундаментального решения также верна формула интегрального представления:

$$u\left(x^0\right) = \int\limits_{S_\rho} \left(u\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \vec{\nu}} - \tilde{E}\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) ds + \int\limits_{B_\rho} \tilde{E}\Delta u dx.$$

Поскольку $\dfrac{\partial \tilde{E}}{\partial \vec{\nu}} = \dfrac{\rho^{1-n}}{\omega_{n-1}}$ на S_ρ, из новой формулы интегрирования по частям имеем неравенство

$$u\left(x^0\right) \leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}\rho^{n-1}} \int\limits_{S_\rho} u(x) ds. \quad (1.10)$$

Так как $u \in C\left(\overline{B}_R\right)$, предельный переход $\rho \to R - 0$ в неравенстве (1.10) даёт неравенство (1.9). Теорема 1.1 доказана.

Теорема о среднем по шару

Теорема 1.2 (о среднем по шару). Пусть $B_R\left(x^0\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\right\}$, $u \in C^2\left(B_R\left(x^0\right)\right) \cap C\left(\overline{B}_R\left(x^0\right)\right)$ — субгармоническая функция, тогда

$$u\left(x^0\right) \leqslant \frac{1}{\kappa_n R^n} \int_{B_R\left(x^0\right)} u(x)dx, \quad (1.11)$$

где $\kappa_n = \dfrac{\omega_{n-1}}{n}$ — объём шара единичного радиуса.

Доказательство. Умножим неравенство (1.10) на $\omega_{n-1}\rho^{n-1}$ и проинтегрируем по ρ от 0 до R: $u\left(x^0\right) \displaystyle\int_0^R \omega_{n-1}\rho^{n-1}d\rho \leqslant \int_0^R d\rho \int_{S_\rho} u(x)ds$ или

$u\left(x^0\right)\kappa_n R^n \leqslant \displaystyle\int_{B_R} u(x)dx$, что и требовалось.

Замечание о супергармонических и гармонических функциях

Замечание. Если $u \in C^2\left(B_R\left(x^0\right)\right) \cap C\left(\overline{B}_R\left(x^0\right)\right)$ — супергармоническая функция, то $-u$ есть субгармоническая функция, и для u справедливы неравенства, противоположные (1.9) и (1.11). Гармонические функции одновременно суб- и супергармонические, поэтому для них справедливы теоремы о среднем в форме равенств: если $u \in C^2\left(B_R\right) \cap C\left(\overline{B}_R\right)$ — гармоническая в B_R функция, то

$$u\left(x^0\right) = \frac{1}{\omega_{n-1}\rho^{n-1}} \int\limits_{S_R} u(x)ds,\; u\left(x^0\right) = \frac{1}{\kappa_n R^n} \int\limits_{B_R} u(x)dx\,. \quad (1.12)$$

Принцип максимума

Теорема 1.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $u \in C^2(\Omega)$ — субгармоническая функция, достигающая максимального значения M в Ω. Тогда $u \equiv M$ в Ω.

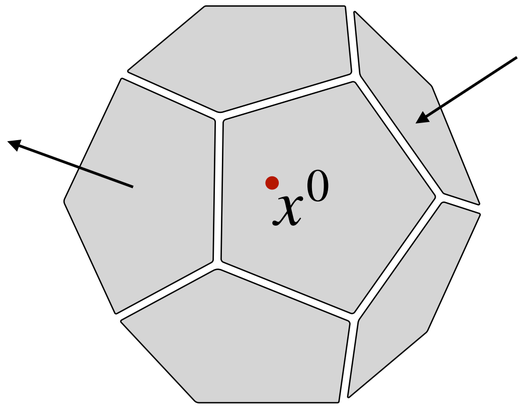
Принцип максимума для гармонических функций доказан К.Ф. Гауссом в 1840-м году в знаменитой статье.

Johann Carl Friedrich Gauß (1777—1855)

Физический смысл принципа максимума

Утверждение теоремы 1.3 очевидно с физической точки зрения ($n = 3$, при стационарном распределении температура достигает свой максимум на границе области, иначе бы началась эволюция распределения температуры) и допускает два доказательства: первое основано на топологической связности Ω, второе — на линейной связности. Мы рассмотрим первое доказательство.

$\Delta u = 0$



Принцип максимума: доказательство

Доказательство. Рассмотрим множество уровня $S_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. По условию теоремы $S_M \neq \varnothing$, кроме того, S_M — замкнутое множество в топологии Ω, потому что $u \in C(\Omega)$ ($S_M = \Omega \cap \tilde{S}$, $\tilde{S}$ — замкнутое множество). Возьмём любую точку $x^0 \in S_M$, шар $B_R = B_R\left(x^0\right) \Subset \Omega$ и применим неравенство со средним по шару для субгармонической функции $u - M$:

$$0 = u\left(x^0\right) - M \leqslant \frac{1}{\kappa_n R^n} \int_{B_R} (u - M)\, dx.$$

С другой стороны, подынтегральная функция $u - M \leqslant 0$, поэтому $u \equiv M$ в B_R, $B_R \subset S_M$ и множество S_M открыто.

Замечание о супергармонических и гармонических функциях

Но область Ω топологически связна, и единственное непустое открыто-замкнутое подмножество в Ω — это сама область Ω, т.е. $S_M = \Omega$, что и нужно было доказать.

Замечание. Для супергармонических функций справедлив принцип минимума: если функция $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u \leqslant 0$, достигает минимум m в Ω, то $u \equiv m$ в Ω. Гармонические функции удовлетворяют принципу максимума и минимума.

Следствия принципа максимума

Следствие 1.1. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$. Тогда непостоянная гармоническая функция $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ удовлетворяет в любой точке $x \in \Omega$ неравенству

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u. \quad (1.13)$$

Доказательство. $\overline{\Omega}$ — компакт $\Rightarrow$ функция $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ достигает максимального и минимального значения на $\overline{\Omega}$. Если точка максимума $x^0 \in \Omega$, то принципу максимума $u \equiv u\left(x^0\right)$ в Ω, следовательно точка максимума $x^0 \in \partial\Omega$, и для всех $x \in \Omega$ $u(x) < u\left(x^0\right) = \max_{\partial\Omega} u$. Применение теоремы 1.3 к гармонической функции $-u$ дает неравенство $-u(x) < \max_{\partial\Omega}(-u) = -\min_{\partial\Omega} u \Rightarrow$ неравенство (1.13), следствие 1.1 доказано.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — известная функция на границе области (граничная функция). *Задача Дирихле* для уравнения Лапласа в области Ω имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \qquad (1.14)$$

где $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ означает, что $u(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in \partial\Omega$ (краевое условие Дирихле). *Классическим решением* задачи Дирихле (1.14) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, которая при подстановке в задачу (1.14) обращает уравнение Лапласа и условие Дирихле в тождества.
Необходимое условие существования классического решения: $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Корректность по Адамару

Задача Дирихле (1.14) называется *внутренней*, если $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$.
Дадим определение корректно поставленной краевой задачи на примере внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \qquad (1.15)$$

Пусть $\mathscr{U}$ — пространство решений (в том или в другом смысле) задачи (1.15), $\mathscr{F}$ — пространство правых частей (данных) задачи Дирихле. В пространствах $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ задана топология или хотя бы фиксирован класс сходящихся последовательностей. Краевая задача (1.15) может определять линейный оператор $\mathscr{U} \to \mathscr{F}$, возможно определённый не на всём $\mathscr{U}$.

Корректность по Адамару

Например, $\mathscr{U} = C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ — пространство классических решений, $\mathscr{F} = C(\partial\Omega)$ — пространство данных задачи (1.15).

Определение 1.8. Линейная краевая задача (в частности, задача (1.15)) называется корректно поставленной (или корректной по Адамару) в классе пространств $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$, если выполнены три положения:

1) *существование*: решение в пространстве $\mathscr{U}$ существует для любых данных из $\mathscr{F}$;

Корректность по Адамару

2) *единственность*: решение единственно в пространстве $\mathscr{U}$;
3) *устойчивость*: разрешающий оператор $R : \mathscr{F} \to \mathscr{U}$, сопоставляющий правым частям из $\mathscr{F}$ единственное решение из $\mathscr{U}$, непрерывен.

Единственность решения линейной краевой задачи эквивалентна единственности тривиального решения задачи с нулевыми данными. Для задачи Дирихле (1.15):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Из следствия 1.1 принципа максимума следует, что тривиальное решение задачи (1.16) единственно.

Единственность решения внутренней задачи Дирихле

Следствие 1.2. Классическое решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа единственно.

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ — два решения задачи (1.15). Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет задаче Дирихле для уравнения Лапласа с условием $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ на границе (задаче (1.16)). Если u не равна нулю тождественно, то в любой $x \in \Omega$ по следствию 1.1 имеем

$0 = \min\limits_{\partial\Omega} u < u(x) < \max\limits_{\partial\Omega} u = 0$ — противоречие $\Rightarrow u \equiv 0$ в $\Omega \Rightarrow$ $u_1 \equiv u_2$ в Ω.

Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — известная функция на границе, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — известная функция в области.
Задача Дирихле для уравнения Пуассона в области Ω имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \qquad (1.17)$$

Классическим решением задачи Дирихле (1.17) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, которая при подстановке в задачу (1.17) обращает уравнение Пуассона и условие Дирихле в тождества.
Необходимое условие существования классического решения:
$\varphi \in C(\partial\Omega), f \in C(\Omega)$.

Функция-корректор и функция Грина внутренней задачи Дирихле

Определение 1.9. *Функцией-корректором* задачи Дирихле (1.17) называется такое семейство функций $g\left(\cdot, x^0\right) \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right), x^0 \in \Omega$, что для любой $x^0 \in \Omega$

(i) $\Delta g\left(\cdot, x^0\right) = 0$ в Ω (гармоническая в области Ω функция);

(ii) $g\left(x, x^0\right) = -E\left(x - x^0\right), x \in \partial\Omega$, где E — фундаментальное решение оператора Лапласа.

Функцией Грина задачи Дирихле (1.17) называется сумма фундаментального решения и функции-корректор:

$$G\left(x, x^0\right) = E\left(x - x^0\right) + g\left(x, x^0\right).$$

Существование и единственность функции Грина

Утверждение 1.3. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^2$. Тогда внутренняя задача Дирихле (1.17) имеет единственную функцию-корректор и, следовательно, единственную функцию Грина.

Доказательство. Функция-корректор удовлетворяет при любой $x^0 \in \Omega$ задаче Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta g\left(\cdot, x^0\right) = 0 \text{ в } \Omega, \\ g\left(x, x^0\right) = -E\left(x - x^0\right), x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.18}$$

Единственность решения задачи (1.18) следует из следствия 1.2 принципа максимума. Существование решения (1.18) следует из теоремы Перрона (см. младующую тему). Утверждение 1.3 доказано.

Интегральная формула

Пусть $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ — решение задачи (1.17) (в частности, $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$), задача (1.17) имеет функцию Грина, $x^0 \in \Omega$ ($g\left(\cdot, x^0\right) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ для любой $x^0 \in \Omega$). Сложим формулу интегрального представления

$$u\left(x^0\right) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}}ds + \int_{\partial\Omega} - E\left(x - x^0\right)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}ds + \int_{\Omega} E\left(x - x^0\right)\Delta u(x)\,dx$$

со второй формулой Грина, применённой для функции u и функции-корректор $g\left(\cdot, x^0\right)$:

$$0 = \int_{\Omega} g\left(x, x^0\right)\Delta u dx + \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial g}{\partial \vec{\nu}} - g\left(x, x^0\right)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right)ds.$$

Интегральная формула

Учитывая, что $\Delta u = f$ в Ω, получим $u\left(x^0\right) =$

$$= \int_\Omega \left(E\left(x - x^0\right) + g\left(x, x^0\right)\right) f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} \left(E\left(x - x^0\right) + g\left(x, x^0\right)\right) \varphi(x)\, ds\,.$$

Утверждение 1.4. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, задача Дирихле (1.17) имеет классическое решение $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ и существует функция-корректор $g\left(\,\cdot\,, x^0\right) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда в любой точке $x^0 \in \Omega$ верна формула интегрального представления решения

$$u\left(x^0\right) = \int_\Omega G\left(x, x^0\right) f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \vec{\nu}} \varphi(x)\, ds. \quad (1.19)$$

Свойства функции Грина

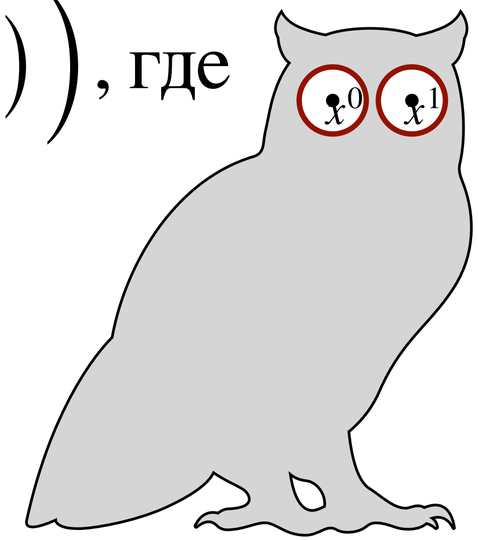
Утверждение 1.4 имеет тот недостаток, что требует существование классического решения задачи Дирихле, принадлежащего пространству $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Кроме того, от функции-корректор требуется принадлежность пространству $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Эти проблемы мы рассмотрим в следующей теме.

Утверждение 1.5. Пусть G — функция Грина внутренней задачи Дирихле (1.17). Тогда: 1) $G\left(x^0, x^1\right) = G\left(x^1, x^0\right)$ для всех $x^0, x^1 \in \Omega, x^0 \neq x^1$ (симметрия функции Грина); 2) $G\left(x, x^0\right) < 0$ для всех $x^0, x \in \Omega, x^0 \neq x$ (отрицательность функции Грина).

Свойства функции Грина: доказательство

Замечание: для доказательства предположим, что функция-корректор $g\left(\cdot, x^0\right) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ для всех $x^0 \in \Omega$.

Доказательство. 1) Для доказательства симметрии надо применить вторую формулу Грина к функциям $u = G\left(\cdot, x^1\right)$, $v = G\left(\cdot, x^0\right)$ в области $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \left(\overline{B}_\varepsilon\left(x^0\right) \sqcup \overline{B}_\varepsilon\left(x^1\right)\right)$, где $B_\varepsilon\left(x^0\right) \Subset \Omega, B_\varepsilon\left(x^1\right) \Subset \Omega$, устремить ε к нулю.



Рассуждая как при доказательстве формулы интегрального представления, получаем $u\left(x^0\right) = v\left(x^1\right)$, т.е. $G\left(x^0, x^1\right) = G\left(x^1, x^0\right)$.

Свойства функции Грина: доказательство

2) Функция Грина $G = G\left(\cdot, x^0\right), x^0 \in \Omega$, гармоническая в области $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon\left(x^0\right)$, где $B_\varepsilon\left(x^0\right) \Subset \Omega$, поэтому удовлетворяет принципу максимума. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любой $x \in \Omega_\varepsilon$ имеем (следствие 1.1)

$$0 = \max_{\partial\Omega} G\left(x, x^0\right) = \max_{\partial\Omega_\varepsilon} G\left(x, x^0\right) > G\left(x, x^0\right).$$

Утверждение 1.5 доказано.

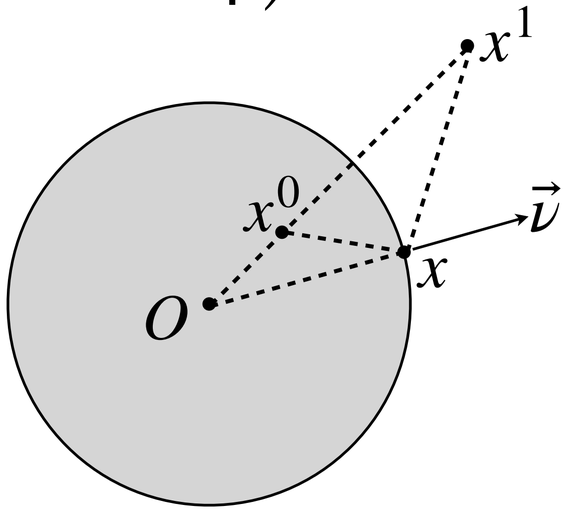
Построение функции Грина — сложная задача, однако для областей с ‘хорошей’ геометрией это вполне возможно. Например, для шара.

Функция Грина задачи Дирихле в шаре

Пусть B_R — шар радиуса R с центром в начале координат n -мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Функция Грина задачи Дирихле в B_R имеет вид

$$G\left(x, x^0\right) = \mathscr{E}\left(\left|x - x^0\right|\right) - \mathscr{E}\left(R^{-1}\left|x^0\right|\left|x - x^1\right|\right), \quad (1.20)$$

где $x, x^0 \in \overline{B}_R, x \neq x^0$. Точка x^1 лежит вне шара на луче из O, проходящем через $x^0 \neq 0$ так, чтобы $\left|x^0\right|\left|x^1\right| = R^2 \Rightarrow x^1$ — *инверсия* точки x^0 относительно $S_R = \partial B_R$.



Проверка определения функции Грина

Надо показать, что функция $g\left(x, x^0\right) = -\mathscr{E}\left(R^{-1}\left|x^0\right|\left|x - x^1\right|\right)$ есть функция-корректор задачи Дирихле в шаре. Фиксируем произвольную $x^0 \in B_R, x^0 \neq 0$.

- $\Delta g = 0$ (проверяется непосредственным вычислением, либо используются свойства фундаментального решения).
- $x \in S_R \Rightarrow \Delta x^0 O x \sim \Delta x 0 x^1$ (по первому признаку) $\Rightarrow$
$$\left|x - x^0\right| = \frac{\left|x^0\right|}{R}\left|x - x^1\right| \Rightarrow G\left(x, x^0\right) = 0 \text{ на } S_R.$$
- $g\left(x, x^0\right) \to C(R)$, если $x^0 \to 0$ при фиксированной $B_R \ni x \neq 0$. $C(R) = ?$

Содержание

1. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Интегральное представление функций

2. Функция Грина задачи Дирихле

3. Функция Грина задачи Робена и задачи Неймана

Задача Робена для уравнения Пуассона

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega \in C^1$, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — известная граничная функция, $\sigma : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — известный граничный коэффициент, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — известная функция в области. Задача Робена для уравнения Пуассона в области Ω имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + \sigma(x)u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{1.21}$$

где $\vec{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Классическое решение задачи Робена

Классическим решением задачи Робена (1.21) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, которая при подстановке в задачу (1.21) обращает уравнение Пуассона и условие Робена в тождества. Для сокращения обозначим через $\mathscr{B}u = \partial_{\vec{\nu}} u + \sigma u\Big|_{\partial\Omega}$ граничный оператор задачи Робена (1.21).

Определение 1.6. *Функцией-корректором* задачи Робена (1.21) называется такое семейство функций $g\left(\cdot, x^0\right) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right), x^0 \in \Omega$, что для любой $x^0 \in \Omega$

(i) $\Delta g\left(\cdot, x^0\right) = 0$ в Ω (гармоническая в области Ω функция);

Функция Грина задачи Робена

(ii) $\mathscr{B}g = -\mathscr{B}E$, где E — фундаментальное решение оператора Лапласа.

Функцией Грина задачи Робена (1.21) называется сумма фундаментального решения и функции-корректор:

$$G\left(x, x^0\right) = E\left(x - x^0\right) + g\left(x, x^0\right).$$

Пусть $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ — решение задачи (1.21), задача Робена имеет функцию Грина, $x^0 \in \Omega$. Рассмотрим формулу интегрального представления функций

$$u\left(x^0\right) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}}ds + \int_{\partial\Omega} -E\left(x - x^0\right)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}ds + \int_{\Omega} E\left(x - x^0\right)\Delta u(x)\,dx$$

Интегральное представление решения задачи Робена

и вторую формулу Грина, применённую для функции u и функции-корректор $g\left(\cdot, x^0\right)$: $0 = \int_\Omega g\left(x, x^0\right) f(x) dx +$

$+ \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial g}{\partial \vec{\nu}} - g \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) ds$. Учитывая, что $\mathscr{B}u = \varphi$, а $\mathscr{B}g = -\mathscr{B}E$ на $\partial\Omega$, имеем $0 = \int_\Omega g\left(x, x^0\right) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(u\mathscr{B}g - g\mathscr{B}u \right) ds -$

$- \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \left(ug - gu \right) ds = \int_\Omega gf dx + \int_{\partial\Omega} \left(-u\mathscr{B}E - g\varphi \right) ds$. Сложим:

Интегральное представление решения задачи Робена

$$u\left(x^0\right) = \int_{\Omega} \left(E + g\right) f dx + \int_{\partial\Omega} - \left(E + g\right) \varphi ds.$$

Утверждение 1.6. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, задача Робена (1.21) имеет классическое решение $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ и существует функция-корректор $g\left(\cdot, x^0\right) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда в любой точке $x^0 \in \Omega$ верна формула интегрального представления решения

$$u\left(x^0\right) = \int_{\Omega} G\left(x, x^0\right) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} - G\left(x, x^0\right) \varphi(x) ds. \quad (1.22)$$

Замечания о задаче Робена

- Задача Робена может не иметь решений, либо иметь бесконечно много решений, если граничный коэффициент σ принимает неположительные значения. В этом случае стандартные определения функции-корректор и функции Грина не годятся.
- Однако, если $\sigma \geqslant 0$ на $\partial\Omega$ и σ не равен нулю тождественно, то классическое решение задачи (1.21) единственно.

Разрешимость задачи Робена будет подробно исследована в теме 4 «Эллиптические операторы второго порядка».

Задача Неймана для уравнения Пуассона

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega \in C^1$, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — известная граничная функция, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — известная функция в области. Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона в области Ω имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \quad (1.23)$$

где $\vec{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Классическое решение: $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Должно быть $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Необходимое условие разрешимости

Утверждение 1.7. Пусть существует классическое решение задачи Неймана (1.23) $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)ds. \quad (1.24)$$

Доказательство. Применим вторую формулу Грина для решения и тождественной единицы: $\int_{\Omega} (u\Delta 1 - 1\Delta u)\, dx =$

$= \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial 1}{\partial \vec{\nu}} - \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) ds$. Т.к. $\Delta u = f$ в Ω, а $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = \varphi$ на $\partial\Omega$, получаем равенство (1.24).

Ядро задачи Неймана

Рассмотрим задачу Неймана с нулевыми данными:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

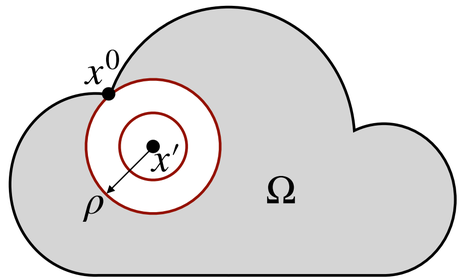
Множество решений задачи (1.25) называется *ядром* задачи Неймана (1.23) (не путайте операторное ядро с ядрами интегральных формул). Очевидно, что все константы (постоянные функции) принадлежат ядру. Оказывается, что других решений задача (1.25) не имеет.

Лемма Хопфа—Олейник о нормальной производной

Лемма 1.1. Пусть u — непостоянная гармоническая функция в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $x^0 \in \partial\Omega$ — точка максимума. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\left(x^0\right) > 0$.

Замечание. Предполагается, что точки x^0 можно коснуться изнутри Ω некоторым шаром: $\exists B_\rho(x') \subset \Omega, S_\rho(x') \cap \partial\Omega = \left\{x^0\right\}$.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $\max\limits_{\partial\Omega} u = u\left(x^0\right) = 0$, тогда для $x \in \Omega$ $u(x) < 0$. Рассмотрим область $Q = B_\rho(x') \backslash \overline{B_{\rho/2}(x')}$.



Лемма Хопфа—Олейник о нормальной производной: доказательство

Рассмотрим функцию $w(x) = -\left|x - x'\right|^{2-n} + \rho^{2-n}$, если $n > 2$, $w(x) = \ln\left|x - x'\right| - \ln\rho$ при $n = 2$. Имеем $\Delta u = 0$ и $\Delta w = 0$ в Q, $u(x) \leqslant 0 = \varepsilon w(x)$, $\left|x - x'\right| = \rho$, $u(x) \leqslant \varepsilon w(x)$ при малом $\varepsilon > 0$, если $\left|x - x'\right| = \rho/2$, т.к. $\max\limits_{S_{\rho/2}(x')} u = s < 0$, $\varepsilon w\big|_{S_{\rho/2}(x')} = \text{const} < 0$. Таким образом, $u \leqslant \varepsilon w$ на ∂Q и $u\left(x^0\right) = \varepsilon w\left(x^0\right) = 0 \Rightarrow u \leqslant \varepsilon w \leqslant 0$ в Q. Отсюда следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\left(x^0\right) \geqslant \varepsilon \dfrac{\partial w}{\partial \vec{\nu}}\left(x^0\right) > 0$. Лемма 1.1 доказана.

Ядро задачи Неймана

Пусть граница области удовлетворяет условиям леммы 1.1.

Утверждение 1.8. Любое классическое решение $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ задачи (1.25) — постоянная функция.

Доказательство. Предположим, что $u \neq \text{const}$. Но тогда по лемме Хопфа—Олейник в точке максимума $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\left(x^0\right) > 0$, что противоречит условию Неймана задачи (1.25). Утверждение 1.8 доказано.

Функция Грина задачи Неймана

Стандартной функции Грина внутренней задачи Неймана не существует. Действительно, неформально говоря, она должна удовлетворять для любой точки $x^0 \in \Omega$ задаче

$$\begin{cases} \Delta G\left(x, x^0\right) = \delta\left(x - x^0\right) \text{ в } \Omega, \\ \partial_{\vec{\nu}} G\left(x, x^0\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Но $1 = \int_\Omega \delta\left(x - x^0\right) dx \neq \int_{\partial\Omega} 0 ds = 0$, нарушено необходимое условие разрешимости (1.24), задача (1.26) не имеет решений (приведите строгие рассуждения через функцию-корректор).

Функция Грина задачи Неймана

Это связано с тем, что внутренняя задача Неймана (1.23) разрешима по Фредгольму. Модифицируем стандартное определение функции Грина.

Определение 1.7. *Функцией-корректором* задачи Неймана (1.23) называется такое семейство функций $g\left(\cdot, x^0\right) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right), x^0 \in \Omega$, что для любой $x^0 \in \Omega$

(i) $\Delta g\left(\cdot, x^0\right) = 0$ в Ω (гармоническая в области Ω функция);

(ii) $\partial_{\vec{\nu}} g\left(\cdot, x^0\right)\Big|_{\partial\Omega} = \dfrac{1}{|\partial\Omega|} - \partial_{\vec{\nu}} E\left(\cdot, x^0\right)\Big|_{\partial\Omega}$, где

Функция Грина задачи Неймана

E — фундаментальное решение оператора Лапласа, $|\partial\Omega|$ — гиперплощадь $\partial\Omega$. *Функцией Грина* задачи (1.23) называется сумма фундаментального решения и функции-корректор:

$$G\left(x, x^0\right) = E\left(x - x^0\right) + g\left(x, x^0\right).$$

Другими словами, функция Грина внутренней задачи Неймана (1.23) удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta G\left(x, x^0\right) = \delta\left(x - x^0\right) \text{ в } \Omega, \\ \partial_{\vec{\nu}} G\left(x, x^0\right)\Big|_{\partial\Omega} = \dfrac{1}{|\partial\Omega|}. \end{cases}$$

Интегральная формула

Замечание. Функция Грина задачи Неймана определена с точности до константы (в условиях утверждения 1.8).
Пусть $\partial\Omega \in C^1$, $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ — решение задачи (1.23), задача Неймана (1.23) имеет функцию Грина, $x^0 \in \Omega$. Сложим формулу интегрального представления функций со второй формулой Грина, применённой для решения u и функции-корректор:

$$g\left(\cdot, x^0\right): 0 = \int_\Omega g\left(x, x^0\right) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial g}{\partial \vec{\nu}} - g \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) ds.$$

Учитывая, что $\partial_{\vec{\nu}} u = \varphi$, $\partial_{\vec{\nu}} g = \dfrac{1}{|\partial\Omega|} - \partial_{\vec{\nu}} E$ на $\partial\Omega$, будем иметь

Интегральная формула

$$u\left(x^0\right) = \int_\Omega \left(E+g\right) f dx + \int_{\partial\Omega} \left(u\partial_{\vec{\nu}} E - E\varphi + \frac{u}{|\,\partial\Omega\,|} - u\partial_{\vec{\nu}} E - g\varphi \right) ds =$$

$$= \frac{1}{|\,\partial\Omega\,|} \int_\Omega u dx + \int_\Omega \left(E+g\right) f dx + \int_{\partial\Omega} -(E+g)\varphi dx.$$

Утверждение 1.9. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, задача Неймана (1.23) имеет классическое решение $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, существует функция-корректор $g\left(\,\cdot\,, x^0\right) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда в любой точке $x^0 \in \Omega$ верна формула интегрального представления решения

$$u\left(x^0\right) = C + \int_\Omega G\left(x, x^0\right) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} -G\left(x, x^0\right) \varphi(x) ds,$$

где $C = |\,\partial\Omega\,|^{-1} \int_{\partial\Omega} u(x) ds.$