# ТЕМЫ И СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИЙ

1. **Функция Грина (лекции 1 – 2).** Оператор Лапласа, уравнения Лапласа и Пуассона. Постановки задачи Дирихле, задачи Неймана и задачи Робена для уравнения Пуассона. Внутренние, внешние и общие неограниченные краевые задачи. Корректность по Адамару краевых задач. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа. Определение фундаментального решения ЛДО. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами. Фундаментальное решение оператора Лапласа: общая формула, свойства. Формула интегрального представления функций из пространства $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона: определение, свойства. Формула интегрального представления решения внутренней задачи Дирихле. Конформные преобразования на плоскости и в евклидовом пространстве. Инверсия. Преобразование Кельвина. Функция Грина задачи Дирихле в шаре. Формула Пуассона. Функция Грина внутренней однозначно разрешимой задачи Робена для уравнения Пуассона: определение, свойства. Формула интегрального представления решения внутренней задачи Робена. Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана. Функция Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона: определение, свойства, интегральная формула. [1: глава III], [4: лекции IX, XI-XIII, XV, XVII, XXI], [5: глава 2], [9: глава I, §4; глава II, §5; глава III, §11; глава V, §§27, 29], [10: §10], [12: глава 8], [15: глава IV, §§4–5], [19: chapter 4], [20: главы 2–4], [34: главы I–II]

2. **Гармонические функции (лекции 2 – 4).** Гармонические, субгармонические и супергармонические функции. Теоремы о среднем для субгармонических функциий и следствия. Принцип максимума. Единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Условие внутренней сферы. Лемма Хопфа–Олейник о нормальной производной. Разрешимость задачи Неймана с точностью до константы. Оператор усреднения: определение, свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Внутренняя точечная априорная оценка производных гармонический функций. Аналитичность гармонических функций. Теорема Лиувилля о гармонических функциях. Теорема об устранимой особенности. Доказательство формулы Пуассона. Обратная теорема о среднем. Теорема Вейерштрасса для гармонических функций. Непрерывные суб- и супергармонические функции: определение и свойства. Решение Перрона. Теорема Перрона. Теорема Арцела. Доказательство теоремы Перрона. Локальные барьеры и регулярные точки границы. Лемма о регулярной точке. Критерий существования классического решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Геометрические условия регулярности: двумерных случай, условие внешней сферы, условие внешнего конуса. Класс $C^2$ гладкости границ оптимален с точки зрения оператора Лапласа. Функционал энергии Дирихле. Определение ёмкости области. Критерий Винера (без доказательства). [1: глава III], [2: 2.2], [4: лекция X], [5: главы 2–3], [6: глава 4, §3], [7: глава 3], [9: глава V, §24], [13: chapters 1, 2, 3, 11], [14: chapter 2], [15: глава IV, §2], [16: chapter 4], [17: chapters 1, 2; chapter 6, 6.1], [19: chapter 4], [21: chapter 4], [22: chapter 8], [34: главы III–VI]

3. **Пространства Соболева (лекции 5 – 7).** Неклассические пространства и обобщённые решения: мотивация, $L_2$-теория эллиптических операторов и краевых задач. Пространства $L_2(\Omega)$, $L_{2,loc}(\Omega)$: повторение[1]. Определение и основные свойства обобщённых производных. Лемма об усреднении обобщённых производных. Определение и простые свойства пространств Соболева $H^k(\Omega)$. Принцип разбиения единицы. Теорема о финитном продолжении функций и её следствия. Компактные операторы. Неравенство Пуанкаре. Теорема о компактном вложении пространства $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Принцип непрерывного продолжения. Конструкция оператора следа $T : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$. Пространство $H^1_0(\Omega)$: эквивалентность определений. Пространство следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$: определение, эквивалентная норма. Теорема об эквивалентной норме пространства $H^1(\Omega)$. Неравенство Фридрихса. Теорема вложения Соболева: одномерный вариант (с доказательством), общий $L_2$-вариант (без доказательства). [2: chapter 5], [3: глава 1], [5: глава 7], [6: глава III], [8: глава 2], [10: §7], [35: глава I], [36: chapters 10-11; chapter 15], [37: chapters 8–9]

4. **Эллиптические операторы второго порядка (лекции 7 – 9).** Эллиптические ЛДО. Эллиптические ЛДО второго порядка, дивергентная форма эллиптического ЛДО второго порядка. Равномерная эллиптичность. Формально сопряжённый ЛДО, дивергентные эллиптические ЛДО. Постановка краевых задач. Сильные решения. Определение обобщённых решений стандартных внутренних краевых задач. Теорема об экстремали функционала энергии. Необходимое условие экстремали. Метод Ритца. Теорема о сходимости минимизирующей последовательности в методе Ритца. Функционал энергии позитивной задачи Дирихле с дивергентным равномерно эллиптическим оператором второго порядка. Функционал энергии позитивной задачи Робена с дивергентным равномерно эллиптическим оператором второго порядка. Корректность позитивной задачи Дирихле. Корректность позитивной задачи Робена. Фредгольмовы операторы, индекс фредгольмового оператора. Теорема Рисса–Шаудера (альтернатива Фредгольма). Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле для общего равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Сопряжённая задача, явный критерий разрешимости. Фредгольмова разрешимость задачи Робена для общего равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Сопряжённая задача, явный критерий разрешимости. Теорема Гильберта–Шмидта. Определение обобщённых собственных значений и собственных функций дивергентного равномерно эллиптического оператора второго порядка. Теорема о спектре и с.ф. дивергентного эллиптического оператора второго порядка (краевое условие Дирихле/краевое условие Неймана). Вариационные свойства с.з. и с.ф. Гладкость обобщённых решений краевых задач и собственных функций дивергентных эллпитических операторов. [3: глава 2], [5: глава 8], [6: глава IV], [8: глава 3], [10: §8], [35: глава 2], [37: chapter 6], [42: глава 3]

5. **Обобщённые функции (лекции 10 – 12).** Пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$

[1] Пространства Лебега квадратично интегрируемых функций изучались в первой теме «Введение» осеннего семестра 2025/26 уч.г.

и пространство обобщённых функций $\mathcal{D}'(\Omega)$. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Примеры сингулярных функций: дельта-функция Дирака, простой слой, двойной слой, главная часть $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Сужение обобщённых функций на открытые подмножества. Носитель обобщенной функции. Производные обобщённых функций. Умножение обобщённых функций на гладкие функции. Контрпример Л. Шварца. Тензорное произведение обобщённых функций: определение и свойства. Свёртка регулярных функций. Определение свёртки обобщённых функций. Достаточное условие существования свёртки. Свойства свёртки: коммутативность, билинейность, существование нейтрального элемента, свёртка и линейные замены переменных, дифференцирование свёртки. Проблема ассоциативности свёртки и её решение: 3-свёртка. Свёрточные уравнения. Фундаментальное решение свёрточного оператора. Теорема об однозначной разрешимости свёрточного уравнения. Пространство быстро убывающих основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Обобщённые функции медленного роста, сходимость в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Пространство мультипликаторов Фурье. Определение преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста. Обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье свёртки. Теорема о существовании фундаментального решения медленного роста оператора с постоянными коэффициентами. Пространства Соболева дробного порядка. Общая теорема о следах. [7: глава 1], [9: глава III], [10: §§4–5], [36: chapter 9], [38: глава I; глава II, §§6–7], [39: §§1–5], [40: 1–7], [42: глава 2]

6. **Задача Коши: часть 2 (лекции 12 – 14).** Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Метод спуска построения фундаментального решения линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Фундаментальное решение волнового оператора для одной, двух и трёх пространственных переменных. Задача Коши для волнового уравнения: постановка, классические решения. Формула Д'Аламбера, формула Пуассона, формула Кирхгофа. Теорема о существовании и единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения (с одной, двумя и тремя пространственными переменными). Обобщённые решения задачи Коши для волнового уравнения: определение, существование и единственность. Решения с разрывами производных на характеристиках. Задача Коши для уравнения теплопроводности: постановка, классические решения. Теорема о существовании и единственности классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Элементы качественной теории решений уравнения теплопроводности. Уравнение Бюргерса. Метод исчезающей вязкости. Стандартные задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений в частных производных. Теорема Коши–Ковалевской. [7: главы 4–5], [9: глава III], [10: §9], [11: глава 5, 5.3], [14: 1; 5–6], [16: chapters 5–6], [19: chapter 3; chapter 6], [21: chapters 2–3], [22: chapter 4–5; chapter 7], [35: глава 3], [38: глава III, §§14–15], [39: §§7], [41: 10], [42: глава 4; глава 6]

7. **Начально-краевые задачи (лекции 15 – 16).** Постановка начально-краевых задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Определение обобщённых решений. Метод Фурье: формальное решение. Теорема о существовании и един-

ственности обобщённого решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, априорная оценка решения. Теорема о существовании и единственности обобщённого решения первой начально-краевой задачи для волнового уравнения, априорная оценка решения. Гладкость обобщённых решений начально-краевых задач. Метод Галёркина на примере третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности/волнового уравнения. Слабая сходимость приближений Галёркина к обобщённому решению. [1: глава IV], [2: chapter 7], [3: главы III—IV], [6: глава V, §2; глава VI, §2], [8: глава 4], [9: глава VI]

# ТЕМЫ, СОДЕРЖАНИЕ И ЗАДАНИЯ ПЗ

1. **Функция Грина (занятия 1 – 2)**: первое инд. дом. задание. Функция Грина задачи Дирихле в шаре, формула Пуассона (вывод). Функция Грина задачи Дирихле/Неймана в верхнем полупространстве. Функция Грина краевой задачи в квадранте плоскости со смещанными краевыми условиями. Метод отражений. Метод конформных преобразований построения функции Грина задачи Дирихле в односвязной плоской области. Функция Грина задачи Дирихле в секторе плоскости. Функция Грина задачи Дирихле в эллипсе. [18: chapter 6, 6.3; chapter 12, 12.3], [24: глава V, §17], [25: глава IV, §3], [27: chapter 7, 7.14], [28: глава 1, §1.16], [30: глава IV]

2. **Задача Штурма–Лиувилля (занятие 3)**. Постановка задачи Штурма–Лиувилля, её эквивалентность интегральному уравнению Фредгольма. Свойства собственных значений (с.з.) и собственных функций (с.ф.). Спектральная задача для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с граничными условиями первого и/или второго рода. Спектральная задача для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ на $\mathbb{T}^1$. Задача Штурма–Лиувилля для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с граничными условиями третьего рода. [9: глава V, §22], [10: §3], [24: глава V, §15], [26: chapter 3], [27: chapter 4], [29: §13], [31: lecture 19], [33: chapter 4]

3. **Разделение переменных в декартовых, полярных и сферических координатах (занятия 4 – 6)**: первое общее дом. задание, второе инд. дом. задание. Краевая задача для уравнения Лапласа в квадрате: редукция, первый этап (задача Штурма–Лиувилля), второй этап (разложение по с.ф.). Вывод интегральной формулы из ряда Фурье. Проблема суммирования интегрального ядра. Проблема сходимости ряда Фурье. Спектральная задача для оператора $-\Delta$ в квадрате: получение с.з. и с.ф. методом разделения переменных, анализ кратностей с.з., узловые линии. Краевая задача для уравнения Лапласа в кубе: первый этап ($2D$ спектральная задача), второй этап (разложение по с.ф.), вывод интегральной формулы. Оператор Лапласа в полярных координатах (вывод). Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге: альтернативный вывод формулы Пуассона методом разделения переменных. Краевая задача для уравнения Лапласа в секторе: вывод и анализ интегральной формулы методом разделения переменных. Спектральная задача для оператора $-\Delta$ в полудиске. Функции Бесселя, их основные свойства. Оператор Лапласа–Бельтрами

на римановом многообразии. Оператор Лапласа в сферических координатах. Спектральная задача для оператора $-\Delta$ на сфере $\mathbb{S}^2$: разделение переменных, полиномы Лежандра, сферические функции. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре: первый этап (спектральная задача), второй этап (разложение по с.ф.), вывод формулы Пуассона. [5: лекции XXV–XXX], [9: глава V, §§25–26, §28, §31], [18: chapter 4, 4.3], [24: глава V, §16], [25: глава IV, §4], [26: chapter 5, 5.3.1], [28: глава 1, §1.7], [31: lecture 34], [32: §3]

4. **Вариационные проблемы уравнений в частных производных (занятия 7 – 9)**: второе общее дом. задание, третье инд. дом. задание. Теорема об экстремали квадратичного функционала энергии в гильбертовом пространстве. Вывод уравнения Эйлера–Лагранжа на примере одномерной задачи. Вариационная задача в квадрате с условиями Дирихле: редукция, вывод уравнения. Вариационная задача в кольце: вывод уравнения и краевого условия третьего рода. Вариационная задача в шаре. Обобщённые решения краевых задач и построение функционала энергии. Базисы в $1D$ и $2D$ пространствах Соболева. Метод Ритца построения минимизирующей последовательности. Спектральная задача с условиями третьего рода: вариационный метод отыскания с.з. и с.ф. [2: chapter 8], [21: chapter 4, 4.3], [24: глава V, §19]

5. **Обобщённые функции и фундаментальное решение (занятия 9 – 11)**: третье общее дом. задание. Сходимость в пространстве обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. Гребень Дирака. Вычисление свёртки обобщённых функций. Вычисление преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста. Фундаментальное решение одномерного ЛДО с постоянными коэффициентами. Метод полного и частичного преобразования Фурье построения фундаментального решения. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Метод спуска построения фундаментальных решений ЛДО с постоянными коэффициентами. [24: глава III], [30: главы III–IV], [33: 11]

6. **Задача Коши (занятия 12 – 14)**: четвёртое общее дом. задание, четвёртое инд. дом. задание. Формула Д'Аламбера. Обобщённые решения задачи Коши для волнового уравнения с одной пространственной переменной. Решения с разрывами производных на характеристиках. Формула Кирхгофа. Разложение решения задачи Коши по собственным и присоединённым функциями оператора Лапласа. Формула Пуассона (уравнение теплопроводности). Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Метод преобразования Фурье решения начальных задач для линейных эволюционных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. [15: главы V–VI], [24: глава IV, §§12–13], [26: chapters 7–8], [27: 6; 8–9], [28: глава 2, §§2.1–2.3; глава 3, §§3.1], [31: 30–33; 36–37; 43–44], [33: 3; 5; 9]

7. **Методы решения начально-краевых задач (занятия 14 – 16)**: пятое инд. дом. задание. Метод отражений решения начально-краевых задач для эволюционных уравнений второго порядка на полупрямой. Метод разделения переменных решения начально-краевых задач для эволюционных уравнений на ограниченном проме-

жутке: редукция к однородным краевым условиям, первый этап (задача Штурма–Лиувилля), второй этап (разложение по с.ф.). Метод Фурье для задачи Коши с периодическими условиями по пространственным переменным. Метод Галёркина решения начально-краевых задач на ограниченном промежутке. [4: лекция XXIII], [15: глава II, §3; глава III, §2], [18: chapter 4], [24: глава VI, §§20–21], [25: глава III, §§2–3; глава V, §§2–3], [26: chapter 5], [28: глава 2, §§2.6–2.7; глава 3, §§3.3], [30: глава II], [32: §3, 3.1,3.2]

# РАБОТА В СЕМЕСТРЕ И ЭКЗАМЕН

В весеннем семестре нет рейтинга, так как курс «Уравнения в частных производных» завершается экзаменом в летнюю сессию. Однако, слушателям предлагается в течение семестра заработать несгораемую на экзамене оценку (оценку за семестр), посещая лекции и практические занятия, выполняя индивидуальные и общие домашние задания, сдавая коллоквиумы.

1) ***Посещаемость лекций.*** Всего запланировано 16 (шестнадцать) лекций. Необходимо посетить 8 (восемь) или более лекций, чтобы получить оценку за семестр.

2) ***Посещаемость практических занятий (ПЗ).*** Всего запланировано 16 (шестнадцать) ПЗ. Необходимо посетить 8 (восемь) или более ПЗ, чтобы получить оценку за семестр.

3) ***Общие домашние задания (ОДЗ).*** Всего запланировано 4 (четыре) общих домашних задания. Каждое ОДЗ состоит из 4 или 5 задач. Чтобы получить зачёт за общее домашнее задание, надо решить любые три задачи из него.

4) ***Индивидуальные домашние задания (ИДЗ).*** Всего запланировано 5 (пять) индивидуальных домашних заданий. Чтобы получить зачёт за ИДЗ, необходимо сделать все указанные в нём пункты.

5) ***Лекционные задачки.*** По каждой теоретической теме будут предложены лекционные задачки. Как только преподаватель получает верное решение, лекционная задачка закрывается. Две решённые лекционные задачки стоят одно ОДЗ либо одно ИДЗ[2].

6) ***Активность на лекциях и ПЗ («птички»).*** За один выход к доске студентка/студент получает 2 (две) «птички». За ответ на вопрос преподавателя или уместный вопрос/замечание студентка/студент получает 1 (одну) «птичку». Одно ОДЗ стоит 3 (три) «птички», одно ИДЗ — 4 (четыре) «птички». Кроме того, «птички» закрывают пропущенные лекции и занятия.

[2]Таким образом, правила по лекционным задачкам не изменились с прошлого семестра, но тогда за решение задачки просто выдавались рейтинговые баллы.

7) ***Теоретические коллоквиумы.*** В семестре (середине и конце) состоятся два теоретических коллоквиума. Коллоквиумы будут иметь форму тестов[3]. На коллоквиуме разрешено пользоваться собственными конспектами лекций и ПЗ. Для зачёта надо получить не меньше 60% от максимального количества баллов.

Итак, присутствие на $\geqslant 50\%$ лекций и на $\geqslant 50\%$ ПЗ — необходимое условие для получения какой-либо семестровой оценки. Теперь опишем критерий выставления оценок.

- Оценка '3' («удовлетворительно»): посещаемость, зачёт за один коллоквиум, 2 (два) ОДЗ, 2 (два) ИДЗ.
- Оценка '4' («хорошо»): посещаемость, зачёт за один коллоквиум, 3 (три) ОДЗ и 4 (четыре) ИДЗ; зачёты за два коллоквиума, 2 (два) ОДЗ, 3 (три) ИДЗ.
- Оценка '5' («отлично»): посещаемость, зачёты за два коллоквиума, 4 (четыре) ОДЗ, 4 (четыре) ИДЗ.

Хотя программа экзамена будет обнародована только в конце семестра, общие правила закрепляются уже здесь, чтобы можно было сравнить объём работы в семестре со сложностью сдачи экзамена.

- Экзаменационный билет включает в себя два вопроса и три задачи. В задачах исключаются громоздкие вычисления.
- Пользоваться чем-либо на экзамене, кроме ручки, бумаги, собственного тела и духа, категорически запрещено.
- На подготовку ответов на вопросы и решение задач даётся не более 90 минут. Доказательства теорем приводить не обязательно, но формулировки определений и теорем должны быть строгими и полными. Во время ответа лектор оставляет за собой право задать дополнительные вопросы из той лекционной темы, которой принадлежит обсуждаемый вопрос билета.
- Критерий выставления оценок: оценка '5' («отлично») — 3 (три) полностью решённые задачи и убедительные ответы на 2 (два) вопроса из билета; оценка '4' («хорошо») — 2 (две) полностью решённые задачи и убедительные ответы на 2 (два) вопроса из билета либо 3 (три) полностью решённые задачи и убедительный ответ на 1 (один) вопрос из билета; оценка '3' («удовлетворительно») — 2 (две) полностью решённые задачи и убедительный ответ на 1 (один) вопрос из билета либо 1 (одна) полностью решённая задача и убедительные ответы на 2 (два) вопроса.
- Оценка, полученная в семестре, не сгорает на экзамене и влияет на его ход следующим образом: семестровая оценка '3' («удовлетворительно») закрывает один вопрос и одну задачу из билета; семестровая оценка '4' («хорошо») закрывает один вопрос и две задачи из билета.

[3]Тесты на странице курса в LMS роли в формировании семестровой оценки не играют, но их можно рассматривать как демо-варианты коллоквиумов.

# ЛИТЕРАТУРА


0. Лекции, материалы и главы книги А.Е. Байкова: https://baikov.org/pde, https://lms.mai.ru/course/view.php?id=13893.

1. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИФМЛ, 1961.

2. Evans, L.C. Partial Differential Equations. Second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

3. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

4. С.Л. Соболев. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

5. Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, ГРФМЛ, 1989.

6. В.П. Михайлов. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976.

7. О.А. Олейник. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015.

8. Л.Е. Россовский, А.Л. Скубачевский. Введение в теорию уравнений с частными производными. М.: МЦНМО, 2021.

9. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

10. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.

11. А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин. Уравнения с частными производными первого порядка. Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999. http://new.math.msu.su/diffur/pde-first.pdf

12. В.А. Тиморин. Геометрия гамильтоновых систем и уравнений с частными производными. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2017.

13. Axler, S. Bourdon, P. Ramey, W. Harmonic Function Theory, second edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2001: https://www.axler.net/HFT.html.

14. DiBenedetto, E. Partial Differential Equations. Second Edition. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2010.

15. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.

16. Qing Han. A Basic Course in Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

17. Qing Han, Fanghua Lin. Elliptic Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

18. Peter J. Olver. Introduction to Partial Differential Equations. Springer, 2014. https://www-users.cse.umn.edu/ olver/pde.html

19. Walter Craig. A Course on Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

20. А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шапкина. Функция Грина оператора Лапласа. М.: Физический факультет МГУ, 2012. http://math.phys.msu.su/archive/2014_2015/51/10_Func_Grina_WEB.pdf

21. Piero Bassanini, Alan R. Elcrat. Theory and Applications of Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, 1997.

22. Marcelo R. Ebert, Michael Reissig. Methods for Partial Differential Equations. Birkhäuser, 2018.

23. Hyun-Ku Rhee, Rutherford Aris, Neal R. Amundson. First-Order Partial Differential Equations. Volume 1: Theory and Application of Single Equations. Dover Publication, Mineola, New York, 1986.

24. В.С. Владимиров и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

25. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

26. Constanda, C. Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations. Taylor & Francis Group, 2016.

27. Henner, V., Belozerova, T., Nepomnyashchy, A. Partial Differential Equations: Analytical Methods and Applications. Taylor & Francis Group, 2020.

28. В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.

29. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

30. А.И. Комеч. Практические решение уравнений математической физики. Мехмат МГУ, 1993: http://new.math.msu.su/diffur/komech_posobie.pdf.

31. Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan. Ordinary and Partial Differential Equations. With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems. Springer Science+Business Media, 2009.

32. М.М. Смирнов. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975.

33. Victor Ivrii. Partial Differential Equations. Toronto, Ontario, Canada, 2017. https://www.math.toronto.edu/ivrii/PDE-textbook

34. А.Ф. Тиман, В.Н. Трофимов. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968[4].

35. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

36. Leoni, G. A First Course in Sobolev Spaces. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

37. Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 2011.

38. В.С. Владимиров. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

39. М.С. Агранович. Обобщённые функции. М.: МЦНМО, 2015.

40. Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

41. Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.

42. С. Мизохата. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

[4]Позиции 34–42 были добавлены в весеннем семестре.