

Линейные гиперболические 2D уравнения второго порядка

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, где f — целая аналитическая функция.

Задача 5.1. Найти общее решение уравнений:

а) $u_{xy} = 0$;

б) $u_{xy} + u_x = x$;

в) $u_{xy} + u_x + yu_y + (y-1)u = 0$;

г) $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$, $a, b, c = \text{const}$

Решение. Всюду речь идёт о классических решениях на плоскости: $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

а) Пусть $u_x = v$, тогда имеем уравнение $v_y = 0$. Из него следует, что $v = \tilde{c}_1(x)$, где $\tilde{c}_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Относительно функции u имеем уравнение $u_x = \tilde{c}_1(x)$. Если c_1 — некоторая первообразная функции $\tilde{c}_1$, то $\frac{\partial}{\partial x} (u - c_1(x)) = 0 \Rightarrow u - c_1(x) = c_2(y)$, т.е. $u = c_1(x) + c_2(y)$. Здесь $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ — две произвольные и независимые функции. Заметим, что функции c_1, c_2 не определены однозначно: если взять $c_1 + C$, $c_2 - C$, $C = \text{const}$, то решение не изменится.

б) Частное решение неоднородного уравнения есть функция $u_*(x) = \frac{x^2}{2}$. Пусть $u^\circ = u^\circ(x, y)$ — решение соответствующего однородного уравнения

$$u_{xy}^\circ + u_x^\circ = 0.$$

Обозначим $u_x^\circ = v$. Уравнение первого относительно функции v

$$v_y + v = 0$$

имеет общее решение $v = c(x)e^{-y}$. Отсюда $u_x^\circ = c(x)e^{-y}$, $u^\circ = e^{-y}c_1(x) + c_2(y)$, где c_1 — некоторая первообразная функции c . c_1, c_2 — произвольные независимые функции класса C^2 . Итак, общее решение уравнения:

$$u = e^{-y}c_1(x) + c_2(y) + \frac{x^2}{2}.$$

Замечание. $K_0 : C^2(\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^2(\mathbb{R}^2)$ — разрешающий оператор однородного уравнения, его ядро $\text{Ker } K_0 = \left\{ (C, -Ce^{-y}) : C \in \mathbb{R} \right\}$ нетривиально.

Рассмотрим задачу Гурса для этого уравнения

$$\begin{cases} u_{xy} + u_x = x, & -\infty < x, y < \infty, \\ u|_{x=0} = \psi(y), u|_{y=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

где $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = \psi(0)$ — условие согласования. Подставим полученное выше общее решение в условия Гурса:

$$\begin{cases} e^{-y}c_1(0) + c_2(y) = \psi(y), \\ c_1(x) + c_2(0) + \frac{x^2}{2} = \varphi(x). \end{cases}$$

Пользуясь тем, что функция c_1 определена с точностью до аддитивной постоянной, положим $c_1(0) = 0$. Тогда из первого уравнения $c_2(y) = \psi(y)$, а из второго уравнения —

$$c_1(x) = \varphi(x) - \frac{x^2}{2} - \psi(0). \text{ Проверим, что всё сошлось:}$$

$c_1(0) = \varphi(0) - \psi(0) = 0$. Итак, решение задачи Гурса имеет вид

$$u = e^{-y}\varphi(x) + \psi(y) + \frac{x^2}{2}(1 - e^{-y}) - \psi(0)e^{-y}.$$

Эту формулу можно считать общим решением уравнения $u_{xy} + u_x = x$ на плоскости, причём $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольные, однозначно определённые функции, связанные единственным соотношением $\varphi(0) = \psi(0)$.

в) Уравнение

$$u_{xy} + u_x + yu_y + (y-1)u = 0 \quad (1)$$

имеет гиперболический тип и представлено в каноническом виде. Его можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_y + u) + y (u_y + u) - u = 0.$$

Введём ещё одну неизвестную функцию $v = u_y + u$. Тогда $v_x + yv - u = 0$ или $u = v_x + yv$. Система двух линейных уравнений первого порядка (с двумя неизвестными функциями)

$$\begin{cases} u = v_x + yv, \\ v = u_y + u \end{cases} \quad (2)$$

эквивалентна уравнению (1) в том смысле, что если функция $u = u(x, y)$ есть решение уравнения (1), то она удовлетворяет системе (2), и наоборот, если $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ — решение системы (2), то из неё можно получить уравнение (1) для функции u .

Получим уравнение относительно $v = v(x, y)$: $u = v_x + yv \Rightarrow u_y = v_{xy} + v + yv_y \Rightarrow v - u = v_{xy} + v + yv_y \Rightarrow v_{xy} + yv_y = -v_x - yv$. Итак, уравнение для второй функции $v = v(x, y)$ имеет вид

$$v_{xy} + yv_y + v_x + yv = 0. \quad (3)$$

К счастью, оператор уравнения (3) допускает факторизацию:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} + y = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + 1 \right).$$

Уравнение относительно функции $w = v_y + v$ есть

$w_x + yw = 0$, а его общее решение есть $w = \tilde{c}_1(y)e^{-xy}$, где

$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(y)$ — произвольная функция. Общее решение

уравнения $v_y + v = \tilde{c}_1(y)e^{-xy}$ будем искать в виде

$v = \tilde{c}_2(x, y)e^{-y}$. Подстановка приводит к уравнению

$\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial y} e^{-y} = \tilde{c}_1(y) e^{-xy}$ или $\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial y} = c_1(y) e^{-xy}$, где функция

$c_1(y) = \tilde{c}_1(y) e^y$ также произвольная, никаких ограничений на неё нет. Отсюда $\tilde{c}_2(x, y) = \int_0^y c_1(t) e^{-xt} dt + c_2(x)$, где c_2 — произвольная функция на прямой, и

$$v = e^{-y} \int_0^y c_1(t) e^{-xt} dt + e^{-y} c_2(x).$$

Отсюда из первого уравнения системы (2)

$$\begin{aligned} u &= e^{-y} \int_0^y -t c_1(t) e^{-xt} dt + e^{-y} c_2'(x) + e^{-y} \int_0^y y c_1(t) e^{-xt} dt + y e^{-y} c_2(x) = \\ &= e^{-y} \int_0^y (y - t) c_1(t) e^{-xt} dt + y e^{-y} c_2(x) + e^{-y} c_2'(x). \end{aligned}$$

Ответ: $u = e^{-y} \int_0^y (y - t) c_1(t) e^{-xt} dt + y e^{-y} c_2(x) + e^{-y} c_2'(x)$,

$c_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $c_2 \in C^3(\mathbb{R})$ (чтобы $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$).

Но: исчерпывает ли эта формула все классические решения уравнения (1)? Рассмотрим задачу Гурса для нашего уравнения:

$$\begin{cases} u_{xy} + y u_y + u_x + (y - 1)u = 0, & -\infty < x, y < \infty, \\ u|_{x=0} = e^{-y} \psi(y), u|_{y=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

где $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = \psi(0)$. Подставим общее решение в условия Гурса:

$$\begin{cases} e^{-y} \int_0^y (y - t) c_1(t) dt + y e^{-y} c_2(0) + e^{-y} c_2'(0) = e^{-y} \psi(y), \\ c_2'(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Из второго уравнения $c_2(x) = \Phi(x) + C = \int_0^x \varphi(s) ds + C$,

$c_2(0) = C$, $c_2'(0) = \varphi(0)$ (в частности, $c_2 \in C^3(\mathbb{R}^3)$).

Перепишем первое уравнение:

$$\int_0^y (y-t)c_1(t)dt = \psi(y) - yC - \varphi(0).$$

Это интегральное уравнение *свёрточного типа*: в левой части стоит свёртка $y\theta(y) * c_1(y)\theta(y)$. Продифференцируем это уравнение:

$$\int_0^y c_1(t)dt = \psi'(y) - C.$$

Отсюда константа $C = \psi'(0)$. Ещё раз продифференцируем: $c_1(y) = \psi''(y)$. Обратите внимание, что $c_1 \in C(\mathbb{R})$, но, вообще говоря, $c_1 \notin C^1(\mathbb{R})$, как было указано раньше). Таким образом, решение задачи Гурса (и общее решение уравнения) имеет

$$\text{вид } u = e^{-y} \int_0^y (y-t)\psi''(t)e^{-xt}dt + \\ + e^{-y}\varphi(x) + ye^{-y} \int_0^x \varphi(s)ds + \psi'(0)ye^{-y}.$$

г) Найдём общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0,$$

$a, b, c = \text{const}$. Сделаем, во-первых, замену $u = k(x, y)v$, уничтожающую первые производные в уравнении. Здесь v — новая неизвестная функция, коэффициент k нужно взять таким образом, чтобы в преобразованном уравнении не было v_x, v_y . Имеем

- $u_x = kv_x + k_x v$; $u_y = kv_y + k_y v$;
- $u_{xy} = kv_{xy} + k_y v_x + k_x v_y + k_{xy} v$;
- $kv_{xy} + k_y v_x + k_x v_y + k_{xy} v + akv_x + ak_x v + bk v_y + bk_y v + ck v = 0 \Rightarrow$
 $kv_{xy} + (k_y + ak) v_x + (k_x + bk) v_y + (ck + ak_x + bk_y + k_{xy}) v = 0.$

Относительно k имеем переопределённую систему

$$\begin{cases} k_x + bk = 0, \\ k_y + ak = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $k = c(y)e^{-bx}$, подстановка во второе уравнение даёт $c'(y) + ac(y) = 0 \Rightarrow c(y) = Ce^{-ay}$. Таким образом, $k = Ce^{-bx-ay}$.

Пусть $C = 1$, тогда уравнение относительно v имеет вид

$$v_{xy} + (c - ab - ba + ab)v = 0.$$

Если обозначить $\lambda = ab - c$, то в случае $\lambda \neq 0$ получим уравнение Клейна-Гордона

$$v_{xy} - \lambda v = 0. \quad (4)$$

В простейшем случае, когда $\lambda = 0$, имеем $v_{xy} = 0 \Rightarrow v = c_1(x) + c_2(y)$, $c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольные независимые функции на прямой $\Rightarrow u = e^{-bx-ay} (c_1(x) + c_2(y))$.

План построения общего решения уравнения (4):

- 1) получить функцию Римана оператора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda$;
- 2) применить формулу Римана (формулу Грина) для полученной выше функции Римана и решения задачи Гурса

$$\begin{cases} v_{xy} - \lambda v = 0, & -\infty < x, y < \infty, \\ v|_{x=0} = \psi(y), v|_{y=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

получив таким образом общее решение уравнения Клейна-Гордона (4).

Задача 5.2. Построить функцию Римана оператора Клейна-

Гордона $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda$.

Решение. Вспомним определение функции Римана линейного гиперболического 2D оператора второго порядка

$$\mathcal{L}u = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u.$$

Формально сопряжённый оператор имеет вид:

$$\mathcal{L}^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (a(x, y)v) - \frac{\partial}{\partial y} (b(x, y)v) + c(x, y)v.$$

Определение. Функцией Римана оператора $\mathcal{L}$ на плоскости называется функция $R = R(s, t, x, y)$, удовлетворяющая для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ специальной задаче Гурса

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{s,t}^* R = 0, & -\infty < s, t < \infty, \\ R|_{s=x} = e^{\int_y^t a(x, \theta) d\theta}, & R|_{t=y} = e^{\int_x^s b(\theta, y) d\theta}. \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda \Rightarrow \mathcal{L}^* = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda. \text{ Поскольку } a = 0, b = 0 \text{ в}$$

операторе $\mathcal{L}$, задача Гурса для функции Римана имеет вид

$$\begin{cases} R_{st} - \lambda R = 0, & -\infty < s, t < \infty, \\ R|_{s=x} = 1, & R|_{t=y} = 1. \end{cases}$$

Предположим, что

$$R(s, t, x, y) = R_0(s - x, t - y) = r((s - x)(t - y)), \text{ где } r \text{ —}$$

аналитическая в окрестности нуля функция, $r(0) = 1$ (для условий Гурса). Тогда функцию Римана можно представить в виде ряда

$$R(s, t, x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (s - x)^k (t - y)^k.$$

Найдём коэффициенты c_k . Имеем

$$\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k (s - x)^{k-1} (t - y)^{k-1} = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 c_{k+1} (s - x)^k (t - y)^k.$$

Подстановка ряда в уравнение $R_{st} - \lambda R = 0$ даёт

$$c_1 - \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)^2 c_{k+1} - \lambda c_k) (s-x)^k (t-y)^k = 0.$$

Отсюда $c_1 = \lambda$, $c_{k+1} = \frac{\lambda}{(k+1)^2} c_k \Rightarrow c_k = \frac{\lambda^k}{k!^2}$. Итак, ряд для функции Римана имеет вид

$$R(s, t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!^2} (s-x)^k (t-y)^k.$$

Ряд сходится тотально (r — целая аналитическая функция).

Можно действовать иначе, получив уравнение для функции r :

$$\frac{\partial R}{\partial s} = r'((s-x)(t-y))(t-y),$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t \partial s} = r''((s-x)(t-y))(s-x)(t-y) + r'((s-x)(t-y)).$$

Обозначим $\xi = (s-x)(t-y)$, получим уравнение относительно функции r :

$$\xi \frac{d^2 r}{d\xi^2} + \frac{dr}{d\xi} - \lambda r = 0. \quad (5)$$

У нас есть одно условие $r(0) = 1$, но его хватит, так как $\xi = 0$ — сингулярная точка уравнения (5). Замена $\xi = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}} z^2$

($\lambda \neq 0$, если $\lambda = 0$, то всё просто) преобразует уравнение (5) к уравнению Бесселя индекса нуль

$$z^2 \frac{d^2 r}{dz^2} + z \frac{dr}{dz} + z^2 r = 0. \quad (6)$$

Из условия аналитичности r в окрестности $z = 0$ и равенства $r(0) = 1$ следует, что $r(z) = J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода индекса нуль. Отсюда

$$R(s, t, x, y) = J_0 \left(2i \sqrt{\lambda(s-x)(t-y)} \right).$$

Можно вспомнить разложение функции Бесселя

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \text{ и ещё раз получить разложение}$$

функции Римана в ряд по степеням $\xi = (s-x)(t-y)$.

Вернёмся к уравнению Клейна-Гордона и рассмотрим задачу Гурса для него:

$$\begin{cases} v_{st} - \lambda v = 0, & -\infty < s, t < \infty, \\ v|_{s=0} = \psi(t), \quad v|_{t=0} = \varphi(s). \end{cases} \quad (7)$$

Формула Грина. Для функций $P, Q \in C^1(\overline{\Omega})$, где $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^1$, верна формула

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dy.$$

Формула Римана. Пусть

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u —$$

гиперболический оператор,

$$\mathcal{L}^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (a(x, y)v) - \frac{\partial}{\partial y} (b(x, y)v) + c(x, y)v —$$

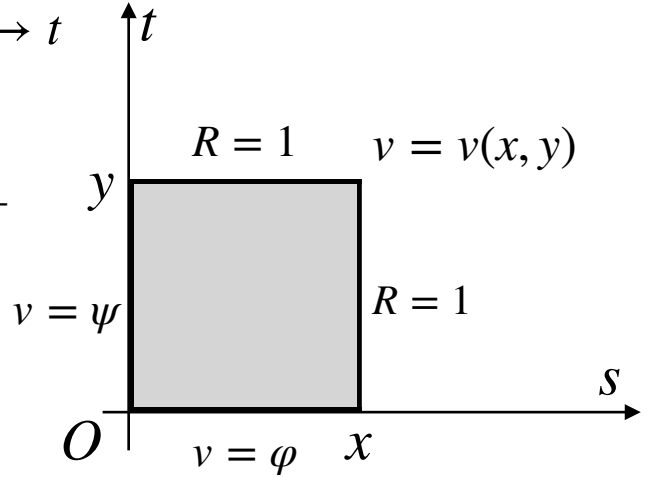
формально сопряжённый оператор. Тогда для любых $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\iint_{\Omega} (u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}^*u) dx dy = \oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy,$$

$$\text{где } P = P[u, v] = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - b(x, y)uv,$$

$$Q = Q[u, v] = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a(x, y)uv.$$

Заменим переменные $x \mapsto s$, $y \mapsto t$
и применим формулу Римана
в области $\Omega = (0, x) \times (0, y)$
для двух функций: $v = v(s, t)$ —
решения задачи Гурса (7), и
 $u = R(s, t, x, y)$ — функции
Римана оператора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda$.



Имеем

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial\Omega} P ds + Q dt = \int_0^x P|_{t=0} ds + \int_0^y Q|_{s=x} dt + \int_x^0 P|_{t=y} ds + \int_y^0 Q|_{s=0} dt. \\
 \bullet \int_0^x P|_{t=0} ds &= \int_0^x \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial R}{\partial s} - R \frac{\partial v}{\partial s} \right) \Big|_{t=0} ds = \frac{1}{2} v R \Big|_{t=0} \Big|_0^x - \\
 &- \int_0^x R \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_{t=0} ds = \frac{1}{2} v(x,0) R(x,0,x,y) - \frac{1}{2} v(0,0) R(0,0,x,y) - \int_0^x R(s,0,x,y) \varphi'(s) ds = \\
 &= \frac{1}{2} \varphi(x) R(x,0,x,y) - \frac{1}{2} \varphi(0) R(0,0,x,y) - \int_0^x R(s,0,x,y) \varphi'(s) ds; \\
 \bullet \int_0^y Q|_{s=0} dt &= \int_0^y \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial R}{\partial t} \right) \Big|_{s=0} dt = - \frac{1}{2} v R \Big|_{s=0} \Big|_y^0 + \\
 &+ \int_0^y R \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{s=0} dt = - \frac{1}{2} v(0,0) R(0,0,x,y) + \frac{1}{2} v(0,y) R(0,y,x,y) - \int_0^y R(0,t,x,y) \psi'(t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \psi(y) R(0,y,x,y) - \frac{1}{2} \psi(0) R(0,0,x,y) - \int_0^y R(0,t,x,y) \psi'(t) dt;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int_0^y Q|_{s=x} dt &= \int_0^y \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial R}{\partial t} \right) \Big|_{s=x} dt = \frac{1}{2} Rv \Big|_{s=x} \Big|_0^y - \\
&- \int_0^y v \frac{\partial R}{\partial t} \Big|_{s=x} dt = \frac{1}{2} R(x, y, x, y) v(x, y) - \frac{1}{2} R(x, 0, x, y) v(x, 0) - \\
&- \int_0^y v(x, t) \frac{\partial R}{\partial t} \Big|_{s=x} dt = \frac{1}{2} v(x, y) - \frac{1}{2} R(x, 0, x, y) \varphi(x); \\
\bullet \int_0^x P|_{t=y} ds &= \int_0^x \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial R}{\partial s} - R \frac{\partial v}{\partial s} \right) \Big|_{t=y} ds = -\frac{1}{2} Rv \Big|_{t=y} \Big|_x^0 + \\
&+ \int_0^x v \frac{\partial R}{\partial s} \Big|_{t=y} ds = -\frac{1}{2} R(0, y, x, y) v(0, y) + \frac{1}{2} R(x, y, x, y) v(x, y) - \\
&- \int_0^x v(s, y) \frac{\partial R}{\partial s} \Big|_{t=y} ds = \frac{1}{2} v(x, y) - \frac{1}{2} R(0, y, x, y) \psi(y).
\end{aligned}$$

Отсюда $v(x, y) - \varphi(0)R(0, 0, x, y) -$

$$-\int_0^x R(s, 0, x, y) \varphi'(s) ds - \int_0^y R(0, t, x, y) \psi'(t) dt = 0 \Rightarrow$$

$$v(x, y) = \int_0^x R(s, 0, x, y) \varphi'(s) ds + \int_0^y R(0, t, x, y) \psi'(t) dt + \varphi(0)R(0, 0, x, y).$$

Поскольку $R(s, t, x, y) = J_0 \left(2i\sqrt{\lambda(s-x)(t-y)} \right)$,

$$R(0, 0, x, y) = J_0 \left(2i\sqrt{\lambda xy} \right), R(s, 0, x, y) = J_0 \left(2i\sqrt{\lambda(x-s)y} \right),$$

$$R(0, t, x, y) = J_0 \left(2i\sqrt{\lambda x(y-t)} \right), \text{ формула имеет вид}$$

$$v(x, y) = \int_0^x J_0 \left(2i\sqrt{\lambda(x-s)y} \right) \varphi'(s) ds + \int_0^y J_0 \left(2i\sqrt{\lambda x(y-t)} \right) \psi'(t) dt + \varphi(0) J_0 \left(2i\sqrt{\lambda xy} \right).$$

Итак, общее решение уравнения $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$

$$\text{имеет вид } u = \int_0^x e^{-bx-ay} J_0 \left(2i\sqrt{\lambda(x-s)y} \right) \varphi'(s) ds + \\ + \int_0^y e^{-bx-ay} J_0 \left(2i\sqrt{\lambda x(y-t)} \right) \psi'(t) dt + \varphi(0) e^{-bx-ay} J_0 \left(2i\sqrt{\lambda xy} \right),$$

где $\lambda = ab - c$.

Задача 5.3. Исследовать классические и обобщённые решения задачи Коши для волнового уравнения (с одной пространственной переменной):

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x). \end{cases} \quad (8)$$

Классическое решение $u \in C^2(t \geq 0)$, обобщённое определим позднее.

Редукция: представим решение $u = v + w$, где v — решение задачи

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ v|_{t=0} = u_0(x), v_t|_{t=0} = u_1(x), \end{cases} \quad (9)$$

w — решение задачи

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ w|_{t=0} = 0, w_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

1) Найдём общее решение уравнения $v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0$.

Приведём уравнение ко второму каноническому виду.

Уравнение характеристик $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0 \Rightarrow$

$$(dx - adt)(dx + adt) = 0 \Rightarrow x + at = C_1, x - at = C_2.$$

Отсюда замена $\xi = x + at, \eta = x - at$ приводит уравнение к каноническому виду: $v_{\xi\eta} = 0$. Имеем $v = c_1(\xi) + c_2(\eta) \Rightarrow v = c_1(x + at) + c_2(x - at), c_1, c_2 \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольные независимые функции.

2) Подставим в начальные условия

$$\begin{cases} c_1(x) + c_2(x) = u_0(x), \\ ac'_1(x) - ac'_2(x) = u_1(x). \end{cases} \quad (11)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (11) и умножим на a :

$$\begin{cases} ac'_1(x) + ac'_2(x) = au'_0(x), \\ ac'_1(x) - ac'_2(x) = u_1(x). \end{cases}$$

Сложим уравнения и получим $2ac'_1(x) = au'_0(x) + u_1(x) \Rightarrow$

$$c_1(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(s)ds.$$

Тогда из первого уравнения системы (11) найдём c_2 :

$$c_2(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(s)ds = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a} \int_x^0 u_1(s)ds.$$

Решение задачи Коши (9) имеет вид

$$v = \frac{1}{2} (u_0(x + at) + u_0(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(s)ds.$$

3) Сделаем замену $\xi = x + at, \eta = x - at$ в системе (10):

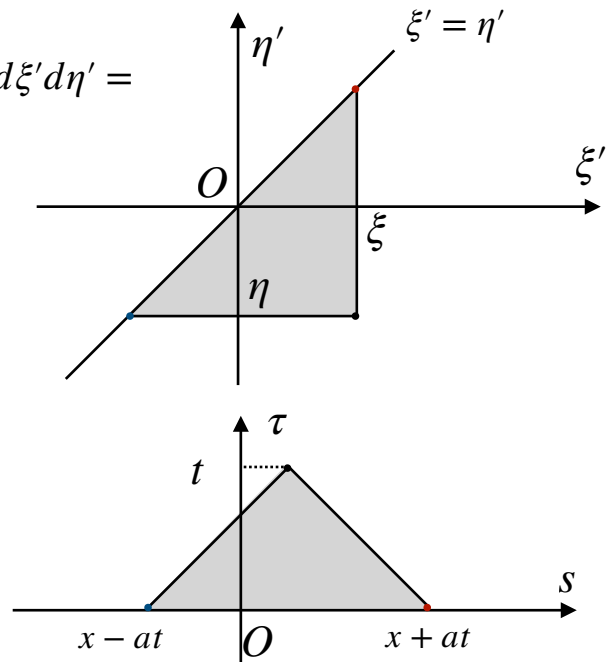
$$\begin{cases} w_{\xi\eta} = -\frac{1}{4a^2} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right), \xi > \eta, \\ w|_{\xi=\eta} = 0, w_\xi - w_\eta|_{\xi=\eta} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Вспомним, что функция Римана оператора $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$ есть

тождественная единица: $R \equiv 1$. Интегральная формула для

решения задачи (12) получается, если применить формулу Римана для R и w в треугольной области (см. рис.).

$$\begin{aligned} \text{Имеем } w(x, t) &= \\ &= w(\xi, \eta) = \iint_{\Delta} -\frac{1}{4a^2} f\left(\frac{\xi' + \eta'}{2}, \frac{\xi' - \eta'}{2a}\right) d\xi' d\eta' = \\ &= \left\{ \xi' = s + a\tau, \eta' = s - a\tau, d\xi' d\eta' = -2a ds d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds. \end{aligned}$$



Таким образом,

решение задачи Коши (8) имеет вид

$$u = \frac{1}{2} (u_0(x + at) + u_0(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-at}^{x+at} f(s, \tau) ds.$$

Мы получили **формулу Д'Аламбера**.

Теорема. Пусть $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(t \geq 0)$. Тогда задача (8) имеет единственное классическое решение $u \in C^2(t \geq 0)$, которое представляется формулой Д'Аламбера.

Теперь поговорим о том, что такое обобщённые решения задачи Коши (8). Как и в случае краевых задач, обобщённые решения определяются с помощью интегральных тождеств.

Ещё раз запишем задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x). \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим пробную функцию $\varphi \in C_0^\infty(t \geq 0)$ (гладкую в $\{t \geq 0\}$ функцию с компактным носителем), умножим её на волновое уравнение и проинтегрируем (по носителю φ):

$$\iint_{t>0} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) \varphi dx dt = \iint_{t>0} f(x, t) \varphi dx dt.$$

Однократное применение формулы интегрирования по частям даёт:

$$\iint_{t>0} (-u_t \varphi_t + a^2 u_x \varphi_x) dx dt + \int_{t=0} u_t \Big|_{t=0} \varphi \Big|_{t=0} (-1) dx = \iint_{t>0} f(x, t) \varphi dx dt.$$

Ввиду того, что $u_t \Big|_{t=0} = u_1$, получим

$$\iint_{t>0} (a^2 u_x \varphi_x - u_t \varphi_t) dx dt = \iint_{t>0} f(x, t) \varphi dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x) \varphi(x, 0) dx. \quad (13)$$

Кроме того, в определению нужно включить первое начальное условие $u \Big|_{t=0} = u_0$ в определение обобщённого решения. Всё это достигается, если рассмотреть пространство $H_{loc}^1(t \geq 0)$, состоящее из всех измеримых в $\{t > 0\}$ функций, которые квадратично интегрируемые относительно любого компакта $K \subset \{t \geq 0\}$, причём их обобщённые производные первого порядка также квадратично интегрируемые относительно любого компакта из $\{t \geq 0\}$. Для функций из $H_{loc}^1(t \geq 0)$ определён след на $\{t = 0\}$, принадлежащий $L_{2,loc}(t = 0)$, т.е. определён оператор следа $\cdot \Big|_{t=0} : H_{loc}^1(t \geq 0) \rightarrow L_{2,loc}(t = 0)$, продолжающий классический след $\cdot \Big|_{t=0} : C^\infty(t \geq 0) \rightarrow L_{2,loc}(t = 0)$.

Определение. Функция $u \in H_{loc}^1(t \geq 0)$ называется обобщённым решением задачи Коши для волнового уравнения (8), если: 1) $u \Big|_{t=0} = u_0$; 2) для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(t \geq 0)$ справедливо интегральное тождество (13).

Построим какое-нибудь обобщённое решение задачи (8), не являющееся

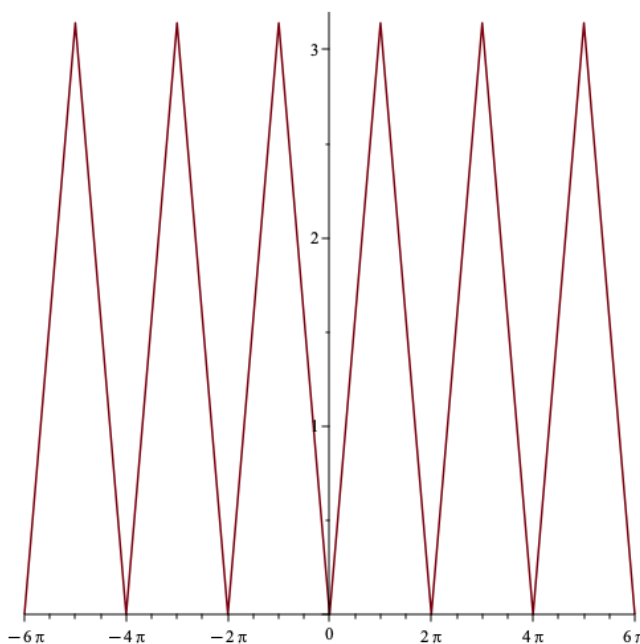
классическим. Рассмотрим начальные функции

$$u_0(x) = \arccos(\cos x),$$

$$u_1(x) = 0, C = \text{const.}$$

График функции $u_0 = u_0(x)$ имеет пилообразный вид:

$$u_0 \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) \subset H_{loc}^{1/2}(\mathbb{R}).$$



Формула Д'Аламбера даёт

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\arccos(\cos(x + at)) + \arccos(\cos(x - at)) \right).$$

Мы получили обобщённое решение. Начальное условие $u|_{t=0} = \arccos(\cos x)$ очевидно. Интегральное равенство проверяется непосредственно. Разрывы (первого рода) первых производных построенного обобщённого решения соответствуют полухарактеристикам волнового уравнения $x \pm at = \pi k, t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$. Посмотрим анимацию решения.

Задача 5.4. Решить задачу Гурса**Решение.** Получим общее решение уравнения.

- 1) Частное решение уравнения есть функция $u_*(x) = \frac{x^2}{2}$.
- 2) Пусть $u^\circ = u^\circ(x, y)$ — решение соответствующего однородного уравнения

$$u_{xy}^\circ + u_x^\circ = 0.$$

Обозначим $u_x^\circ = v$. Уравнение относительно функции v

$$v_y + v = 0$$

имеет общее решение $v = c(x)e^{-y}$. Отсюда $u_x^\circ = c(x)e^{-y}$,
 $u^\circ = e^{-y}f(x) + g(y)$, где f — некоторая первообразная
 функции c , f, g — произвольные независимые функции
 класса C^2 . Итак, общее решение уравнения решаемой
 задачи имеет вид

$$u = e^{-y}f(x) + g(y) + \frac{x^2}{2}.$$

Замечание. $K_0 : C^2(\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^2(\mathbb{R}^2)$ — разрешающий
 оператор однородного уравнения, его ядро $\text{Ker } K_0 =$
 $= \left\{ (C, -Ce^{-y}) : C \in \mathbb{R} \right\}$ нетривиально.

Подставим общее решение в условия Гурса. Имеем

$$\begin{cases} e^{-y}f(0) + g(y) = y^2, \\ f(x) + g(0) + \frac{x^2}{2} = x^2. \end{cases}$$

Пусть $f(0) = -g(0) = C$. Тогда $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$, $g(y) = y^2 - Ce^{-y}$.

Подставим эти функции в общее решение уравнения:

$$u = e^{-y} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) + y^2 - Ce^{-y} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} (e^{-y} + 1) + y^2.$$

Ответ: $u = \frac{x^2}{2} (e^{-y} + 1) + y^2.$