

Тема 3 "Операции над обобщёнными функциями"

Часть 2: "Свёртка и преобразование Фурье"

Задача 3.6. Найти свёртку о.ф.

а) $\theta(x) * \theta(x)f(x)$, где $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$.

имеем по определению

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy,$$

$$\theta(x) * \theta(x)f(x) = \theta(x)f(x) * \theta(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)f(y)\theta(x-y)dy =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x f(y)dy, & x > 0 \end{cases} = \theta(x) \int_0^x f(y)dy.$$

Таким образом, свёртка даёт
первообразную функции f на $[0, \infty)$,

равную нулю в точке $x=0$.

Например, если $f(x) \equiv 1$, то

$$\theta(x) * \theta(x) = \theta(x) \int_0^x f(y) dy = x \theta(x).$$

$$\delta) \delta^{(n)}(x-a) * f(x), \text{ где } f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Вспомним свойства свёртки:

- $\delta * f = f * \delta = f \quad \forall f \in \mathcal{D}'$ (δ — нейтральный элемент);

- $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g$
(дифференцирование свёртки);

- $(f * g)(x+h) = f(x+h) * g(x) =$
 $= f(x) * g(x+h)$ (сдвиг свёртки).

$$\begin{aligned} \text{Тогда имеем } \delta^{(n)}(x-a) * f(x) &= \\ &= (\delta(x-a) * f(x))^{(n)} = (\delta * f)^{(n)}(x-a) = \\ &= f^{(n)}(x-a). \end{aligned}$$

$$\text{б) } e^x \delta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} - ?$$

($a = \text{const}, a > 0$)

Обозначим

$$E(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

E — фундаментальное решение оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, т.е. $\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta(x, t)$.

Отметим, что $E \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^2)$,
 $\text{supp } E = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$.
Кроме того, можно показать,
 $E(x, t) \rightarrow \delta(x)$ при $t \rightarrow +0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(вёртка (если она существует)
есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases}$$

где $u_0(x) = e^x$. Будем искать $(u_0(x) \otimes \delta(t)) * E(x, t)$. Умножим

уровень строгости, отказаться
от аппроксимации единицы:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

$$\langle (u_0(x) \otimes \delta(t)) * E(x, t), \varphi(x, t) \rangle =$$

$$= \langle u_0(x) \otimes \delta(t) \otimes E(\xi, \tau),$$

$$\varphi(x + \xi, t + \tau) \rangle = \langle u_0(x) \otimes E(\xi, \tau),$$

$$\langle \delta(t), \varphi(x + \xi, t + \tau) \rangle \rangle = \langle u_0(x) \otimes$$

$$E(\xi, \tau), \varphi(x + \xi, \tau) \rangle = \langle u_0(x), \langle$$

$$\langle E(\xi, \tau), \varphi(x + \xi, \tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} E(\xi, \tau) \varphi(x + \xi, \tau) d\xi d\tau = \left\{ \begin{array}{l} x + \xi = y \\ \xi = y - x \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx \iint_{\mathbb{R}^2} E(y - x, \tau) \varphi(y, \tau) dy d\tau =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(y, \tau) dy d\tau \int_{-\infty}^{\infty} E(y - x) u_0(x) dx.$$

Таким образом, если сделать
преобразования, свёртка

$$(u_0(x) \otimes \delta(t)) * E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-\xi) u_0(\xi) d\xi$$

$$d\xi = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi -$$

формула Пуассона. Для $u_0(\xi) = e^{\xi}$

имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} + \xi\right] d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2 t} + x - \xi\right] d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4a^2 t} (\xi^2 + 4a^2 t \xi + 4a^4 t^2) + x + a^2 t\right] d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\xi + 2a^2 t}{2a\sqrt{t}} \\ d\xi = 2a\sqrt{t} d\eta \end{array} \right\} =$$

$$= e^{x+a^2 t} 2a\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta =$$

$$= e^{x+a^2 t} 2a\sqrt{\pi t}. \text{ Итак, свёртка}$$

$$\text{равна } \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{x+a^2 t} 2a\sqrt{\pi t} =$$

$$= e^{x+a^2 t} \theta(t).$$

2) $\delta_{S_R}(x) * |x|^2$, где $x \in \mathbb{R}^3$,

δ_{S_R} — поверхностная плотность на сфере

$$S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}.$$

$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \delta_{S_R}, \varphi \rangle = \int_{S_R} \varphi(x) dS.$$

$$\text{supp } \delta_{S_R} = S_R \Rightarrow \delta_{S_R} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

(финитная о.ф.). Свёртка с финитной о.ф. $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ всегда существует, её можно найти по формуле

$$\langle g * f, \varphi \rangle = \langle f(x) \otimes g(y), \eta(y) \varphi(x+y) \rangle,$$

где $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ $\eta = 1$ в ок-ти $\text{supp } g$.

Пользуясь этой формулой, получим

$$\langle \delta_{S_R}(x) * |x|^2, \varphi(x) \rangle =$$

$$= \langle |x|^2 \otimes \delta_{S_R}(y), \eta(y) \varphi(x+y) \rangle =$$

$$= \langle 1(x) \otimes \delta_{S_R}(y), \eta(y) |x|^2 \varphi(x+y) \rangle =$$

$$= \langle 1(x), \langle \delta_{S_R}(y), \eta(y) |x|^2 \psi(x+y) \rangle \rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{|y|=R} |x|^2 \psi(x+y) dS =$$

$$= \int_{|y|=R} dS \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 \psi(x+y) dx$$

интегр-м по $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, применяем теорему Фубини

$$\psi(x+y) dx = \{ \xi = x+y, x = \xi-y, dx = d\xi \}$$

$$= \int_{|y|=R} dS \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi) |\xi-y|^2 d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi) d\xi \int_{|y|=R} |\xi-y|^2 dS.$$

глобальная параметризация

Внутренний интеграл найдём с помощью сферических координат (на сев. полюс N указывает вектор $\vec{\xi}$):

$$\begin{aligned} \int_{|y|=R} |\xi-y|^2 dS &= \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi (|\xi|^2 + R^2 - 2|\xi|R \cos\varphi) R^2 \sin\varphi d\varphi = \\ &= 4\pi R^2 (|\xi|^2 + R^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta_{S_R}(x) * |x|^2 = 4\pi R^2 (|x|^2 + R^2).$$

Задача 3.7. Найти преобразование Фурье о.ф. медленного роста.

а) $\tilde{F} \left[\frac{\delta(x-x^0) + \delta(x+x^0)}{2} \right] = ?$

$x^0 \in \mathbb{R}^n$. Св-во преобразование Фурье связка

$$\tilde{F} [f(x-x^0)](\xi) = e^{-i(\xi, x^0)} \hat{f}(\xi)$$

(здесь и далее $\hat{f}$ — Фурье-образ функции f). Кроме того, $\forall \psi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle F[\delta], \psi \rangle = \langle \delta, \tilde{F}[\psi] \rangle =$$

$$= \langle \delta(\xi), \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-i(\xi, x)} dx \rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \Rightarrow F[\delta] = 1.$$

Отсюда $\tilde{F} \left[\frac{\delta(x-x^0) + \delta(x+x^0)}{2} \right](\xi) =$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F}[\delta(x-x^0)](\xi) + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\delta(x+x^0)](\xi) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i(x^0, \xi)} + \frac{1}{2} e^{i(x^0, \xi)} = \cos(x^0, \xi).$$

д) $\mathcal{F}[1] = ?$ (преобразование Фурье тождественной единицы в $\mathbb{R}^n$). $1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, но $1 \notin L^p(\mathbb{R}^n)$, если $1 \leq p < \infty$, поэтому стандартное преобр-я Фурье нет. Однако, $\mathcal{F}[\delta] = 1 \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[1] = \delta$.

Связь прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[g(-\xi)](x).$$

Тогда $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}[\delta] =$

$$= (2\pi)^n \delta.$$

в) $\mathcal{F}[\theta(x)] = ?$ (преобразование Фурье функции Хевисайда).

$\theta \in L_\infty(\mathbb{R}), \theta \notin L_p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty.$

Определение выше не даёт:

$$\langle \mathcal{F}[\theta], \psi \rangle = \langle \theta, \mathcal{F}[\psi] \rangle = \\ = \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty \psi(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Теорема Фубини не применима:
если переставить интегралы,
будет ерунда

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(x) dx \underbrace{\int_0^\infty e^{-i\xi x} d\xi}_{\text{расходится}}$$

Вспомним, что $\theta' = \delta$, и
воспользуемся формулой преоб-
разования Фурье производной:

$$\mathcal{F}[D^\alpha f(x)](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Доказательство: для $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$D_\xi^\alpha \hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) D_\xi^\alpha (e^{-i(\xi, x)}) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (-ix)^\alpha e^{-i(\xi, x)} dx = \\
&= \mathcal{F}[(-ix)^\alpha \varphi(x)]. \text{ Тогда для } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\
&\langle \mathcal{F}[D^\alpha f], \varphi \rangle = \langle D^\alpha f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \hat{\varphi} \rangle = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle f(\xi), \mathcal{F}[(-ix)^\alpha \varphi(x)](\xi) \rangle = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle \hat{f}(x), (-ix)^\alpha \varphi(x) \rangle = \\
&= \langle (ix)^\alpha \hat{f}(x), \varphi(x) \rangle \quad \square
\end{aligned}$$

Имеем

$$i\xi \hat{\theta}(\xi) = \mathcal{F}[\theta'] = \mathcal{F}[\delta] = 1.$$

Общее решение (в пр-ве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

ур-ня $i\xi g(\xi) = 1$ есть

$$g(\xi) = C \delta(\xi) - i \mathcal{P} \frac{1}{\xi}.$$

Чему равна C , если $g(\xi) = \hat{\theta}(\xi)$?

оказывается $C = \pi \dots$

Предложим другой способ отыскания $\hat{\theta}(\xi)$. Рассмотрим ф-ту $\theta(x)e^{-ax}$, где $a > 0$. Т.к. $\theta(x)e^{-ax} \in L_1(\mathbb{R})$, допустима класс. ф-ла:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\theta(x)e^{-ax}](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{-ax}e^{-i\xi x}dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}dx = \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{a+i\xi}.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\theta(x)e^{-ax} \rightarrow \theta(x) \text{ при } a \rightarrow +0 \text{ в } S'(\mathbb{R})$$

(упражнение). Далее, поскольку

$\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}) \rightarrow S'(\mathbb{R})$ — топологический линейный изоморфизм,

$$\mathcal{F}[\theta(x)] = \lim_{a \rightarrow +0} \mathcal{F}[\theta(x)e^{-ax}] \text{ в } S'(\mathbb{R}).$$

Применим формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm iy} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

Будем иметь

$$\hat{\theta}(\xi) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a + i\xi} = \frac{1}{i} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\xi - ia} =$$

$$= -i \left(i\pi \delta(\xi) + \mathcal{P} \frac{1}{\xi} \right) = \pi \delta(\xi) - i \mathcal{P} \frac{1}{\xi}.$$

2) $\mathcal{F}[\delta_{S_R}] = ?$ (преобразование

Фурье простого слоя на сфере
 $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$ с плотностью
 $\rho = 1$. Используем прямую формулу

для преобразования Фурье
функций о.ф. $f \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \langle f(x), \eta(x) e^{-i(\xi, x)} \rangle,$$

где $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\eta = 1$ в ок-ти $\text{supp } f$.

$$\text{Получим } \mathcal{F}[\delta_{S_R}](\xi) = \langle \delta_{S_R}(x), \eta(x) e^{-i(\xi, x)} \rangle =$$

$$\int_{S_R} e^{-i(\xi, x)} dS \xrightarrow{\text{в сферических координатах}}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi e^{-i|\xi|R \cos \theta} R^2 \sin \theta d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi e^{-i|\xi|R \cos \theta} d(-\cos \theta) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi R^2 \frac{e^{-i|\xi|R\cos\theta}}{2i|\xi|R} \Big|_0^\pi = \\
 &= 4\pi R^2 \frac{e^{i|\xi|R} - e^{-i|\xi|R}}{2i|\xi|R} = 4\pi R^2 \frac{\sin|\xi|R}{|\xi|R}.
 \end{aligned}$$