

Лекция #11

Тема 3 "Обобщённые функции и фундаментальное решение"

4) Сужение на открытое подмн-во и носитель. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω и носитель. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $Q \subset \Omega$ - открытое подмн-во в Ω .
Определим сужение $f|_Q \in \mathcal{D}'(Q)$ следующим образом: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$ рассмотрим продолжение нулём в $\Omega \setminus Q$ и обозначим его через $\tilde{\varphi}$, т.е.
$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in Q, \\ 0, & x \in \Omega \setminus Q; \end{cases} \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Тогда положим

$$\langle f|_Q, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle.$$

Легко видеть, что ол-р сужения $|_Q: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(Q)$ непрерывен. имеем структуру лука (см.

лекцию #2) в области Ω .

Определение 3.9. Ноштелем о.ф.

$f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется гополмента
в Ω максимального (по включению)
открытого подм-ва Q , сужение f
на которое даёт нуль. Обозначение:
 $\text{supp } f$. Это замкнутое в топологии
 Ω множество.

Примеры: $\text{supp } \delta_{x^0} = \{x^0\}$, $\text{supp } \delta_S = S$.
 гольта-функция простой слой

Утверждение 3.1. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $\text{supp } f$ — это конечное мн-во точек
 $x^1, \dots, x^N \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\exists m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}_0$
 $\exists c_{\alpha}^{(j)} \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq m_j, j=1, \dots, N$,
 т.ч. $f = \sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha| \leq m_j} c_{\alpha}^{(j)} D^{\alpha} \delta_{x^j}$. Другими

словами, о.ф. с носителем в данной точке x^0 получаются применением ЛДО с постоянными коэфф-ми к δx^0 .

Док-во - заграда 1 из обмера 2/3 #3.

О.ф. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется финитной (в Ω), если $\text{supp } f \subset \Omega$ и компакт. Мн-во всех финитных о.ф. обозначается $\mathcal{D}_0'(\Omega)$. Однако, это обозначение уже занято...

Пусть $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ — непрерывное вложение двух классических пр-в (например, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}_2 = C^\infty(\Omega)$). О.ф. $f \in \mathcal{D}'_1$ допускает расширение на пр-во $\mathcal{D}_2$, если $\exists F \in \mathcal{D}'_2$ т.ч. $\forall \varphi \in \mathcal{D}_1 \quad \langle F, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. Конечно, расширение может не существовать или не быть единственным. Для единственности необходимо, чтобы вложение $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ было плотным.

утверждение 3.2. Любая о.ф. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ с компактным носителем может быть единственным образом расширена до о.ф. из $\mathcal{D}'_0(\Omega)$, т.е. до финитного. Наоборот, непр. ф-ла на $C^\infty(\Omega)$. Наоборот,

всякая о.ф. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ имеет компактный носитель в Ω .

§ 3. Свёртка, свёрточные уравнения, свёрточные алгебры.

Пусть $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, тогда их свёртка определяется по формуле

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy.$$

Свёртка не всегда существует.

Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$,

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, то

$$\exists f * g \in L_r(\mathbb{R}^n), \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

$$\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

(следует из нер-ва Гёльдера).

Например, $p=q=1 \Rightarrow r=1 \Rightarrow$

$L_1(\mathbb{R}^n)$ — свёрточная алгебра

(ассоциативная, коммутативная алгебра, правда, без нейтр. эл-та).

Другое достаточное условие свёртки использует носители.
утверждение 3.3. Пусть носители $f, g \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ таковы, что $\forall R > 0$ множество

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \text{supp } f, y \in \text{supp } g, |x + y| \leq R\}$$

ограничено. Тогда $\exists f * g \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
 Из утв. 3.3 следует, что если одна из ф-ий финитна, то свёртка всегда существует.

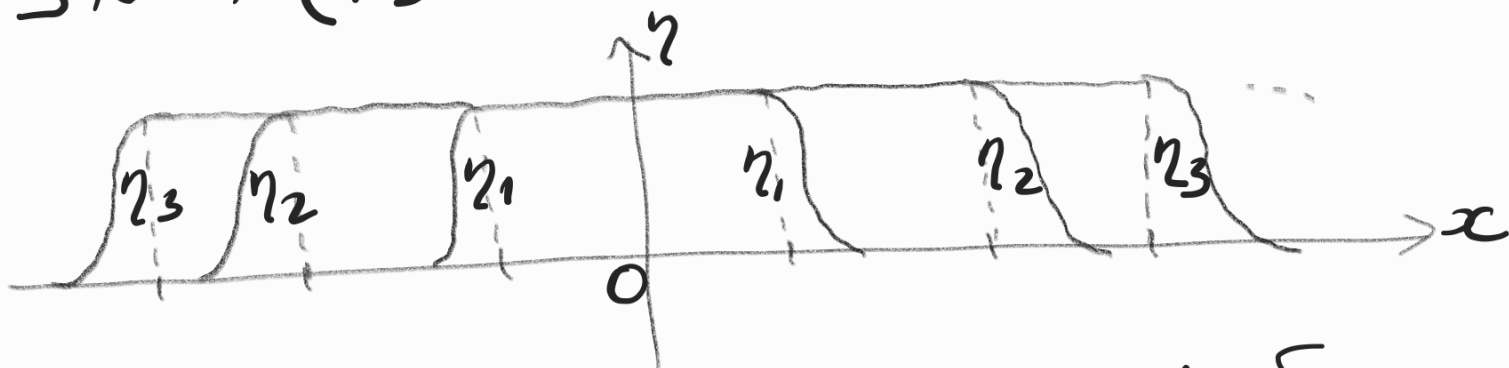
Как определить свёртку о.ф.?
 Пусть $f, g \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \exists f * g \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\xi \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(\xi - y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) g(\xi - y) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x + y) g(x) dx = \end{aligned}$$

теорема Фубини

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y) g(x) \varphi(x+y) dx dy.$$

Определение 3.10. Аппроксимацией единицы в $\mathbb{R}^n$ называется последовательность $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равномерно ограниченная вместе со всеми производными ($\exists x \in \mathbb{Z}_+^n$, $\exists C_x > 0 \forall j \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^n \max |D^x \eta_j| \leq C_x$) и такая, что $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ — компакта $\exists N = N(K) \in \mathbb{N} \forall j \geq N(K) \eta_j|_K = 1$.



Из свойств интеграла Лебесга
следует, что если $f, g \in L_{1, \infty}(\mathbb{R}^n)$,
 $\exists f * g \in L_{1, \infty}(\mathbb{R}^n)$, то для любой
аппроксимации единицы в $\mathbb{R}^{2n}$ и
для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\langle f * g, \varphi \rangle =$
 $= \lim_{j \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) g(y) \eta_j(x, y) \varphi(x+y) dx dy.$

Верно и обратное: если для какой-нибудь аппроксимации единицы $\exists$ предел в правой части последнего равенства, то существует свёртка, а предел не зависит от выбора аппроксимации. Т.о., если определить произведение о.ф. от разных переменных, то свёртку $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ можно определить по формуле: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x)g(y), \eta_j(x, y) \varphi(x+y) \rangle.$$

Определение 3.11. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $g \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ (об-ти/открытые подмн-ва). Тензорным произведением f и g называется о.ф. $f \otimes g \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, действующая на $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ по ф-ле

$$\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle. \quad (3.2)$$

Если $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^1)$,
то $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$, т.е.
 $f \otimes g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, а ф-ла (3.2)
следует из теоремы Фубини.

Определение 3.11 основано на
следующей лемме.

Лемма 3.1. Для любой $g \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$
($\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ - область) определён
линейный непрерывный оператор
проекция $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_1)$,
действующий по ф-ле $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \ni$
 $\varphi \mapsto \psi = \langle g(y), \varphi(\cdot, y) \rangle \in \mathcal{D}(\Omega_1)$.

Док-во леммы 3.1 (и многих
утверждений этой темы) см. в
В.С. Владимирова. Обобщённые ф-ии
в математической физике. М. Наука,
1979.

Замечание. Аналогично можно
определить тензорное произведе-

ние любого (конечного) числа
о.ф.

Пример: $\delta(x_1) \otimes \delta(x_2) = \delta(x_1, x_2)$,
 $\delta(x_1) \otimes \dots \otimes \delta(x_n) = \delta(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть далее $\Omega_1 = \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^m$.
Имеем отождествление
 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

Свойства тензорного произведения

1°. Ассоциативность: $\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) = f \otimes g \otimes h.$$

2°. Коммутативность (теорема
Фубини): $\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$

$$f \otimes g = g \otimes f \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

$$\langle f(x), \langle g(y), \psi(x, y) \rangle \rangle =$$

$$= \langle g(y), \langle f(x), \psi(x, y) \rangle \rangle.$$

3°. Билинейность:

$$\begin{aligned} \forall f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), \\ \forall m_1, m_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall m_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \\ (m_1 f_1 + m_2 f_2) \otimes (m_3 g) = \\ = \underbrace{m_1 m_3}_{m_1(x) m_3(y)} (f_1 \otimes g) + \underbrace{m_2 m_3}_{m_2(x) m_3(y)} (f_2 \otimes g). \end{aligned}$$

4°. Непрерывность: $\forall g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$
линейный оператор
 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f \otimes g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$
непрерывен.

5°. Поддержка тензорного произведения:
 $\text{supp}(f \otimes g) = \text{supp} f \times \text{supp} g$.

Будем говорить, что о.ф.

$F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y)$ не зависит от y , если её можно представить в виде $F(x, y) = f(x) \otimes 1(y)$, где $1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ — тождественная единица.

Такая о.ф. действует на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$ по формуле

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle 1(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \\ = \langle f(x), \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x, y) dy \rangle.$$

Утверждение 3.4. Все решения ур-ня $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$ имеют вид $u(x, y) = f(x) \otimes 1(y)$, где $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n)$ — произвольная о.ф.

Определение 3.12. Пусть $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ — аппроксимация единицы в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ существует предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle f(x) \otimes g(y), \eta_j(x, y) \varphi(x+y) \rangle, \quad (3.3)$$

то соответствующий ф-л назыв-

вается свёрткой и обозначается $f * g$.

утверждение 3.5. Если предел (3.3) существует для какой-нибудь аппроксимации единицы, то существует такой же предел для любой другой аппроксимации единицы, а соответствующий линейный ф-л непрерывен на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, т.е. $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

утверждение 3.6 (достаточное условие $\exists$ свёртки). Пусть $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\forall R > 0$ мн-во $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \text{supp } f, y \in \text{supp } g, |x + y| \leq R\}$ ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$\exists f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g$.

Следствие 3.1. Если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $g \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$, то $\exists f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
(свёртка с финитной о.ф. всегда
существует)

Свойства свёртки

- 1°. Коммутативность: если
 $\exists f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $\exists g * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
и $f * g = g * f$.
- 2°. Билинейность: пусть
 $\exists f_1 * g, f_2 * g$ ($f_1, f_2, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$),
тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ существует
 $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1 f_1 * g + \lambda_2 f_2 * g$.
- 3°. Нейтральный элемент:
 $\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad f * \delta = \delta * f = f$
(дельта-функция — нейтр. элемент
по отношению к свёртке)
- 4°. Связь свёртки: если
 $\exists f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$\exists (R_h f) * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, где R_h —
 оп-р сдвига на вектор h , и
 $(R_h f) * g = f * (R_h g) = R_h(f * g)$.
 5°. Дифференцирование свёртки:
 если $\exists f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$
 $\exists (D^\alpha f) * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и
 $(D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g) = D^\alpha(f * g)$.

Теперь плохие новости...
 Очевидно, что мн-во о.ф.
 $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, т.ч. $\exists f * g$ (f фикс.),
 образует линейное подпр-во
 в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (по св-ву 2°). Однако,
 это подпр-во не обязательно
 замкнутое в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, а свёрточ-
 ный оп-р $g \mapsto f * g$ может быть
 разрывен.

Пример: $\delta(x-k) \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
 при $k \rightarrow \infty$ (упражнение), но

$1 * \delta(x-k) = 1 * \delta(x) = 1$ и не
стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Другая проблема: если $f, g, h \in L_1(\mathbb{R})$, то $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Но свёртка в пр-ве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
вообще говоря, не ассоциативная:

$$(1 * \delta') * \theta = (1 * \delta)' * \theta = 0 * \theta = 0,$$

$$1 * (\delta' * \theta) = 1 * (\delta * \theta)' = 1 * \delta = 1.$$

Ключ к решению проблемы
ассоциативности — три-свёртка.

Определение 3.13. Пусть $f, g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{3n})$ —
аппроксимация единицы в $\mathbb{R}^{3n}$.
Тогда если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ существует
 $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle (f \otimes g \otimes h)(x, y, z), \eta_j(x, y, z) \rangle$. (3.4)
 $\varphi(x+y+z)$, то соответствующий

линейный ф-л называется
три-свёрткой и обозначается
 $f * g * h$.

Определение 3.13 аналогично
определению 3.12 бинарной
свёртки. Предел (3.4) не зависит
от выбора аппроксимации 1,
а соответствующий ф-л $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 3.7 (условие ассоциа-
тивности свёртки). Пусть $f, g, h \in$
 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\exists f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
 $\exists f * g * h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда
 $\exists (f * g) * h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и
 $(f * g) * h = f * g * h$.

Свёрточные операторы и свёрточ-
ные уравнения — центральная
концепция, объединяющая все
линейные уравнения с постоян-
ными коэффициентами (дифферен-

уальные, разностные, дифференциально-разностные), а также некоторые интегральные и интегро-дифференциальные ур-ия.

Пусть $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ - фиксированная о.ф. Рассмотрим свёрточный ол-р $a*$ на подпр-ве в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и свёрточное ур-ие

$$a * u = f \quad (3.5)$$

с неизв. о.ф. u и заданный о.ф. f .

Примеры: 1) Лин. дифф. ур-ие с постоянными коэфф-ми $Lu = f$, где $L = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha - \lambda D D$ с пос. коэфф-ми,

есть свёрточное ур-ие $a_\alpha * u = f$, где $a_\alpha = L \delta = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta$.

2) Линейные разностные ур-ие с постоянными коэфф-ми $Lu = f$, где

$(Ru)(x) = \sum_{j \in Y} c_j u(x - x^j)$ — разностный оператор, Y — конечное мн-во, $x^j \in \mathbb{R}^n$,
 пусть свёрточное уравнение $a_R * u = f$,
 $a_R = R\delta$.

3) линейное интегральное ур-ие
 Вольтерры _{∞}

$$(Ku)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u(y)dy = f(x),$$

где $K \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, представляет собой
 свёрточное ур-ие $K * u = f$.

Определение 3.14. Пусть $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
 Фундаментальным решением свёрточного оп-ра a^* называется обобщённая функция $\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с тем св-м, что $a * \varepsilon = \delta$.

Пусть $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — функ.
 решение свёрточного оп-ра a^* .
 Обозначим

$$A(a, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \exists \varepsilon * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \\ \exists a * \varepsilon * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\}.$$

Утверждение 3.8. Пусть $f \in A(a, \varepsilon)$.
Тогда решение свёрточного ур-ия
(3.5) существует, выражается фор-
мулой $u = \varepsilon * f$ и единственно в
подпространстве $A(a, \varepsilon)$.

Доказательство. 1) Проверим, что
о.ф. $u = \varepsilon * f$ ($\varepsilon * f$ существует,
т.к. $f \in A(a, \varepsilon)$) удовл. ур-ию (3.5):
$$a * u = a * (\varepsilon * f) \stackrel{\text{утв. 3.7}}{=} a * \varepsilon * f = \\ = (a * \varepsilon) * f = \delta * f = f.$$

2) Единственность: нужно показать,
что если $u \in A(a, \varepsilon)$, $a * u = 0$, то
 $u = 0$. Действительно, $\stackrel{\text{утв. 3.7}}{=} u = u * \delta = u * (a * \varepsilon) \stackrel{\text{утв. 3.7}}{=} u * a * \varepsilon = \\ = (u * a) * \varepsilon = 0 \quad \square$