

Тема 3 "Операции над обобщёнными функциями"

Часть 1: функции одной переменной

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ — пр-во основных
ф-ий. Послед-ть $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$
сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если:

- 1) $\exists K \subset \mathbb{R}$, K — компакт, $\forall j \in \mathbb{N}$,
 $\text{supp } \varphi_j, \text{supp } \varphi \subset K$;
- 2) $\forall k \in \mathbb{N}_0$ $\{\varphi_j^{(k)}\}$ сх-ца в $C(K)$.

Сх-ть в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ можно задать с
помощью топологии (см. лекции
по обобщённым функциям).

Определение. Обобщённой ф-ей
на прямой называется всякий
непрерывный линейный ф-л f

на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Непрерывность понимается в смысле Гейне: $\forall \{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), f(\varphi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(\varphi)$.

Обозначение: $\langle f, \varphi_j \rangle = f(\varphi_j)$.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ — пр-во всех обобщ. ф-ий на $\mathbb{R}$.

Определение. Посл-ть $\{f_j\} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ сходится к $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, если

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \langle f_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, j \rightarrow \infty.$$

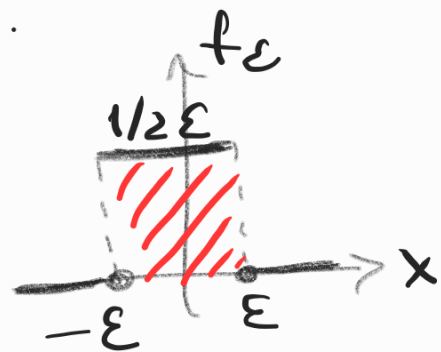
Т.о. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ — линейное пр-во, в котором определена сходимость.

Пусть $f \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R})$. Сооставим ей ф-лу $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, действующую по формуле $\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$ на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Из с.в. интеграла Лебега следует, что

$\tilde{f}$ — действительно о.ф. Лемма Дюбуа-Реймона $\Rightarrow$ полученный оператор $L_{1,loc}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ инъективен. Поэтому f и $\tilde{f}$ можно отождествить.

Задача 3.1. Исследовать сх-ть семейства о.ф. в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

а)
$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$



$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

$\varepsilon \rightarrow +0$

Заметим, что $f_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R})$,

$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) dx = 1$. Если интерпретировать f_ε как пл-ть, то масса $m=1$ при $\forall \varepsilon > 0$, а в пределе получается мат. точка массы 1. Чему равна пл-ть? Дельта-функ.

чим $\delta: \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
 $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Легко показать, что
 δ - сингулярная о.ф., т.е. $\nexists \delta \in$
 $L_{1,loc}(\mathbb{R})$, что $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)$
 $\delta(x) dx = \varphi(0)$ (упражнение).

Проверим, что $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, имеем $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \overset{\text{т.о. среднем}}{1} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon \varphi(x_\varepsilon) =$
 $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon \varphi(x_\varepsilon) =$
 $= \varphi(x_\varepsilon) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.
 Итак, по определению $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon = \delta$.

Определение. Посл-ть (или семейство),
 регулярных ф-ий (из $L_{1,loc}(\mathbb{R})$),
 сходящаяся в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ к дельта-
 функции Дирака называется
 дельта-посл-тью (дельта-семейством).

Рассмотрим ещё один пример
 гольта-семейства.

$$\delta) f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \varepsilon > 0. \text{ Находим}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\varepsilon \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \text{ Имеем } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon \varphi(x) dx}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \left\{ \begin{array}{l} x = \varepsilon t \\ dx = \varepsilon dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 \varphi(\varepsilon t) dt}{\pi(\varepsilon^2 t^2 + \varepsilon^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon t) dt}{\pi(t^2 + 1)}.$$

Установим равномерную сходимости:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon t) dt}{\pi(t^2 + 1)} \right| \leq \underbrace{C_\varphi}_{\max_{\mathbb{R}} |\varphi|} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\pi(t^2 + 1)}}_{\text{х-ср к 1}}$$

Пределный переход: $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varphi(\varepsilon t)}{\pi(1 + t^2)} dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Тогда: 1) $mf \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ действует на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ по ф-ле $\langle mf, \varphi \rangle = \langle f, m\varphi \rangle$;
 2) $f^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ действует на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ по ф-ле $\langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle$
 Умножение на гладкие ф-ии превра-
 щает $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ в $C^\infty(\mathbb{R})$ -модуль, диф-
 ференцирование - в $C^\infty(\mathbb{R})$ -модуль с
 дифф-н. В частности, справедливо
 правило Лейбница

$$(mf)^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j m^{(k-j)} f^{(j)}$$

Задача 3.2. Найти производные
 обобщённых ф-ий.

а) $\theta'(x)$ - ?, где θ - ф-я Хевисайда.

имеем для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})_\infty$

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx =$$

$$= -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow \theta' = \delta.$$

$\delta) (\operatorname{sign} x)' = ?$ Т.к. $\operatorname{sign}(x) = 2\theta(x) - 1$, будем иметь
 $(\operatorname{sign} x)' = (2\theta(x) - 1)' = 2\theta'(x) - 1 = 2\delta(x).$

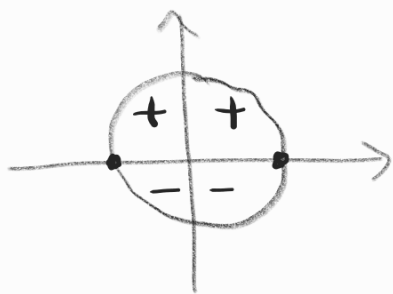
$\text{в) } |x|' = ?$ Классическая пр-ая $|x|' = \operatorname{sign} x$ существует при $x \neq 0$. Но будет ли $\operatorname{sign}(x)$ пр-ой $|x|$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Вычисляем:
 $(|x|)' = (x \operatorname{sign}(x))' = x' \operatorname{sign}(x) + x \operatorname{sign}'(x) = \operatorname{sign}(x) + x\delta(x).$
 Но для любой $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$
 $m(x)\delta(x) = m(0)\delta(x)$, потому что
 $\langle m(x)\delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), m(x)\varphi(x) \rangle = m(0)\varphi(0) = \langle m(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle.$
 Тогда $x\delta(x) = 0$ и $(|x|)' = \operatorname{sign}(x).$

Определение. Ф-я $u \in \tilde{C}^1(\mathbb{R})$,
 если $\exists S \subset \mathbb{R}$ - дискретное мн-во
 (не имеющее кон. пред. точек),
 такое, что: 1) $u \in C^1(\mathbb{R} \setminus S)$;
 2) $\forall a \in S \exists f(a-0), f(a+0),$
 $f'(a-0), f'(a+0)$.

Утверждение. Пусть $f \in \tilde{C}^1(\mathbb{R})$,
 S - её мн-во разрыва, тогда
 $f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ может быть найдена
 по ф-ле

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + \sum_{a \in S} \underbrace{[f(a+0) - f(a-0)]}_{\text{скачок ф-ии}} \delta(x-a).$$

Пример. $f(x) = \text{sign}(\sin x)$. Очевидно,
 $f \in \tilde{C}^1(\mathbb{R})$, $S = \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.



Если $k = 2j$ (чётные),
 то скачок = 2, если

$k = 2j + 1$ (нечётное), то скачок $k = -2$.
 Поэтому $f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} 2 \delta(x - \pi k)$.

$$2) (\cos x \theta(x))' = (\cos x)' \theta(x) + \cos x \theta'(x) = -\sin x \theta(x) + \delta(x).$$

г) $(\ln|x|)' = ?$ Классическая производная $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ существует при $x \neq 0$.

• $x=0$ — особенность $\ln|x|$, но слабая, т.е. $\ln|x| \in L_{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Поэтому $\langle \ln|x|, \psi(x) \rangle = \int \psi(x) \ln|x| dx$.

• $x=0$ — сильная ос-ть $\frac{1}{x}$, т.к.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{1}{x} \right| dx = \infty, \quad \frac{1}{x} \notin L_{1,\infty}(\mathbb{R}),$$

хотя $\frac{1}{x} \in L_{1,\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Задача о главной части: пусть

$x=a$ — узол. шльная особая
 точка ф-ии $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R} \setminus \{a\})$.
 Найти такую $\mathcal{P}f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что
 $\mathcal{P}f|_{\mathbb{R} \setminus \{a\}} = f$. Эта задача не
 всегда имеет решение, а если
 решение существует, то оно не
 может быть единственным ($\mathcal{P}f \leadsto$
 $\mathcal{P}f + C\delta(x-a)$, $C = \text{const}$).

Найдём $(\ln|x|)'$ по определению:
 для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle \ln'|x|, \varphi(x) \rangle =$
 $= -\langle \ln|x|, \varphi'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) \ln|x| dx =$
 $= -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x) \ln(-x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi'(x) \right.$
 $\left. \ln(x) dx \right)$ — перформанс
 $\swarrow$ ф-ла инт-я по частям
 $= -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\ln \varepsilon \cdot (\varphi(-\varepsilon) - \right.$
 $\left. - \varphi(\varepsilon)) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = 0$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \\
&= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \text{ Введём сингул.} \\
&\text{о.ф. } \mathcal{P} \frac{1}{x} \text{ (главная часть } \frac{1}{x} \text{), дейст-} \\
&\text{вующую на } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ по } \varphi\text{-ле} \\
&\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \\
&\text{Таким образом, } (\ln|x|)' = \mathcal{P} \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Задача 3.3. Доказать, что для любого $m \in \mathbb{N}$ о.ф. $\delta, \delta', \dots, \delta^{(m)}$ линейно независимы как элементы линейного пр-ва $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Решение. Предположим, что

$$C_0 \delta + C_1 \delta' + \dots + C_m \delta^{(m)} = 0.$$

Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$0 = (C_0 \delta + C_1 \delta' + \dots + C_m \delta^{(m)}, \varphi) =$$

$$= (\delta, C_0 \varphi - C_1 \varphi' + \dots + (-1)^m C_m \varphi^{(m)}) =$$

$$= C_0 \varphi(0) - C_1 \varphi'(0) + \dots + (-1)^m C_m \varphi^{(m)}(0).$$

Рассмотрим $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(0) \neq 0$ и
 положим $\varphi(x) = x^m \psi(x)$, тогда
 $\varphi^{(m)}(0) = m! \psi(0) \neq 0$, а $\varphi^{(k)}(0) = 0$
 при $k < m$. Тогда $(-1)^m C_m \varphi^{(m)}(0) = 0$
 $\Rightarrow C_m = 0$. Рассуждая аналогично,
 видим, что $C_{m-1} = \dots = C_1 = C_0 = 0$.

Замечание. О.ф. $\delta, \delta', \dots, \delta^{(m)}$ зави-
 ситы как эл-ты модуля $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ над
 кольцом $C^\infty(\mathbb{R})$.

Задача 3.4. Доказать сх-ты ряда
 в пр-ве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k). \quad (1)$$

Решение. Правая часть (1)
определяется так: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k), \varphi(x) \right\rangle = \sum_{\{k: 2\pi k \in \text{supp } \varphi\}} \varphi(2\pi k).$$

С другой стороны,
можно показать, что правую часть
(1) можно определить как предел,
например

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \delta(x - 2\pi k).$$

Рав-во (1) $\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(x) dx \rightarrow \sum_{\{k: 2\pi k \in \text{supp } \varphi\}} \varphi(2\pi k).$$

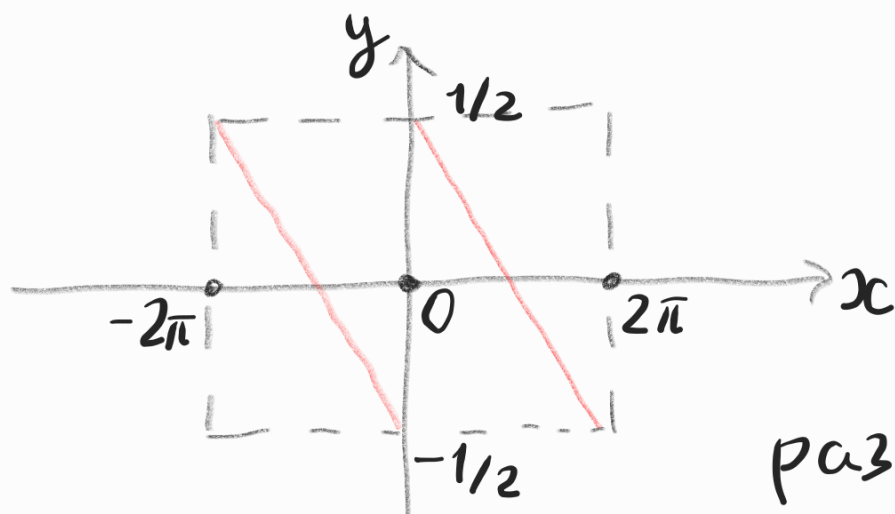
Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

и периодически продолжим её

на всю действительную ось:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} + \left[\frac{x}{2\pi} \right], -\infty < x < \infty.$$



Функция

$$f \in \tilde{C}^1(\mathbb{R}),$$

имеет мн-во

разрыва $S = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Производная ф-ии f :

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Разложим ф-ию f в комплексный ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

$$c_k = \frac{(f, e^{ikx})}{(e^{ikx}, e^{ikx})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

f принимает значения $\in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\bar{c}_k = c_{-k} \text{ для всех } k \in \mathbb{Z}.$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$C_0 = 0; \quad k \neq 0, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-ikx} dx.$$

$$e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) \frac{de^{-ikx}}{-ik} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi ik} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi^2}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx = \frac{1}{2\pi ik}. \quad \text{Итак,}$$

$$f(x) \sim \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2\pi ik} e^{ikx}.$$

Рез Фурье для ф-ии f сильно сходится в пр-ве Лебега, но из сильной сх-ти следует слабая сх-ть в $L_2(0, 2\pi)$. Из неё с учётом плотности $\mathcal{D}(0, 2\pi)$ и теоремы Лебега следует сх-ть в $\mathcal{D}'(0, 2\pi)$. Результат можно распространить на всю

прямую и получить δ -ТЬ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} + \left[\frac{x}{2\pi} \right] = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2\pi i k} e^{ikx}$$

$\nwarrow$
 δ -ТЬ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Оп-р дифференцирования

$' : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ непрерывен,

поэтому

$$-\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = f'(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2\pi} e^{ikx},$$

откуда и следует (1).

Задача 3.5. Решение ур-ий в пространстве обобщённых ф-ий.

а) $x(x-1)y = 0$. Легко угадать два нетривиальных частных решения: $y_1 = \delta(x)$, $y_2 = \delta(x-1) \Rightarrow y = C_1 \delta(x) + C_2 \delta(x-1)$. Но исчерпывает ли все решения ур-ия

эта формула?

Пусть $x y = 0$, $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Докажем, что $y = C \delta(x)$. Рассмотрим основную φ -ию свёртка

$$\eta(x) = \int_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]} \varphi(x) * \chi_r(x),$$

где $\chi_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]}$ - индикаторная (характеристическая) φ -я отрезка $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$, χ_r - ядро усреднения радиуса $r < \varepsilon$. φ -ия $\eta(x) \equiv 1$ в $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\eta(x) \equiv 0$ вне $[-3\varepsilon, 3\varepsilon]$.

имеем

$$\langle y(x), x \varphi(x) \rangle = 0$$

$$\text{для } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Для произвольной

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ рассмотрим цепочку

преобразований: $\langle y, \varphi \rangle =$

$$\begin{aligned}
 &= \langle y(x), \psi(x) + \psi(0)\eta(x) - \psi(0)\eta(x) \rangle = \\
 &= \psi(0) \langle y(x), \eta(x) \rangle + \langle y(x), x\psi(x) \rangle, \\
 &\text{где } \psi(x) = \frac{\psi(x) - \psi(0)\eta(x)}{x}, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Обозначим $C = \langle y(x), \eta(x) \rangle$ (от ψ не зависит), $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ будем иметь $\langle y(x), \psi(x) \rangle = C\psi(0) \Rightarrow$
 $y(x) = C\delta(x)$.

По аналогии можно показать, что $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ общее решение ур-ня $(x - x_0)y = 0$ в пр-ве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ есть $y = C\delta(x - x_0)$.

Решаем наше ур-ие:

$x(x-1)y = 0 \Rightarrow (x-1)y = \tilde{C}_1\delta(x) -$
 линейное неодн. алгебр. ур-ие.
 Общее решение соотв. однород-
 ного ур-ия $(x-1)y_0 = 0$ есть

$y_0 = C_2 \delta(x-1)$. Осталось найти частное решение неоднородного ур-ня. Нетрудно видеть, что оно имеет вид $y_1 = -\tilde{C}_1 \delta(x)$:
 $(-x+1) \tilde{C}_1 \delta(x) = C_1 \delta(x)$. Таким образом, общее решение действительно имеет вид
 $y = -\tilde{C}_1 \delta(x) + C_2 \delta(x-1) = \{C_1 = -\tilde{C}_1\} =$
 $= C_1 \delta(x) + C_2 \delta(x-1)$.

б) $x^2 y' = 1$. Положим $z = xy'$,
 Тогда $xz = 1$ — линейное неодн.
 алг. ур-ие относительно z .
 • одн. ур-ие $xz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = C_1 \delta(x)$;
 • частное решение неодн. ур-ня
 $xz = 1$ пусть $z_1 = \int \frac{1}{x}$.
 Итак, $z = z_0 + z_1 = C_1 \delta(x) + \int \frac{1}{x}$.

Относительно y имеем ур-ие:

$$xy' = C_1 \delta(x) + P \frac{1}{x}. \quad (2)$$

Совотв. однородное ур-ие $xy'_0 = 0$.

Пусть $y'_0 = u$, тогда $xu = 0 \Rightarrow$

$$u = C_2 \delta(x) \Rightarrow y'_0 = C_2 \delta(x) \Rightarrow$$

$$y_0 = C_2 \Theta(x) + \underline{C_3} \text{ ?}$$

Теорема. Все решения ЛОДУ

$$y^{(n)} + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y = 0,$$

где $a_1, \dots, a_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ - классические решения в $C^\infty(\mathbb{R})$.

• Найдём частное решение неоднородного ур-ия $xy'_1 = C_1 \delta(x)$.
Заметим, что $C_1 \varphi(0) = \langle xy'_1, \varphi(x) \rangle =$
 $= \langle y'_1, x\varphi(x) \rangle = -\langle y_1, x\varphi'(x) + \varphi(x) \rangle =$

$$= -\langle y_1, \varphi(x) \rangle - \langle y_1, x\varphi'(x) \rangle,$$

и тогда можно взять $y_1 = -C_1 \delta(x)$.

Замечание. Отметим, что $\delta + x\delta' = 0$, т.е. дельта-ф-я и её производные зависят в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ -модуле на кольце $C^\infty(\mathbb{R})$.

• Найдём частное решение неоднородного ур-ня $xy_2' = \mathcal{P} \frac{1}{x}$.
Если $x \neq 0$, то $y_2' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{x}$.

Но тогда можно испытать $y_2 = -\mathcal{P} \frac{1}{x}$. В самом деле: для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle xy_2', \varphi(x) \rangle &= \langle y_2', x\varphi(x) \rangle = -\langle y_2, x\varphi'(x) + \varphi(x) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, x\varphi'(x) \rangle + \langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle = 0, \text{ т.к.} \\ &\text{в.р. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi'(x)}{x} dx = 0. \end{aligned}$$

Итак, общее решение ур-ня (2)
(следовательно, исходного ур-ня)
представляет собой $y = y_0 + y_1 +$
 $+ y_2 = C_2 \theta(x) + C_3 - C_1 \delta(x) - P \frac{1}{x}.$

Замечание. Кол-во констант в
общем решении равно сумме
порядка ур-ня и порядков нулей
старшего коэфф-та ($1 + 2 = 3$).