

Тема 2 "Вариационные проблемы уравнений в частн. производных: часть 2"

Задача 2.5. Указать ф-л энергии
краевой задачи

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x), 0 < x < 1, \\ u'(0) = 0, u'(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решить соответствующую вариационную проблему методом Рунца.

Решение. Схема:

- 1) определить обобщённое решение задачи (1);
- 2) интерпретировать это определение как необходимое условие экстремали, указать форму S и функционал l ;
- 3) восстановить ф-л энергии $E(u) = S(u, u) - 2\langle l, u \rangle$.

Предположим, что $u \in H^2(0,1)$ - сильное

решение задачи (6). Умножим ур-ие на $v \in H^1(0,1)$ и проинтегрируем:

$$\int_0^1 (-u'' + u) v dx - \int_0^1 f(x) v dx = 0.$$

Применим ф-лу интегрирования по частям:

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 (u'v' + uv) dx - \int_0^1 f(x)v dx = 0.$$

С учётом краевых условий имеем

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx - \int_0^1 f(x)v dx = 0. \quad (7)$$

Определение. Ф-ия $u \in H^1(0,1)$ называется обобщённым решением задачи Неймана (6), если для любой пробной ф-ии $v \in H^1(0,1)$ выполняются интегральные равенства (7).

Итак, $s(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx = (u, v)_{H^1}$,
 $\langle f, v \rangle = \int_0^1 f(x)v dx$, поэтому ф-ла энергии есть

$$E(u) = \int_0^1 (u'^2 + u^2) dx - 2 \int_0^1 f(x)u dx,$$

а соответствующая вариационная задача представляет собой

$$E(u) \rightarrow \min, u \in H^1(0,1). \quad (8)$$

Решим задачу (8) методом Рунга.

Для этого в пр-ве $H^1(0,1)$ следует ввести базис. Это можно сделать как минимум двумя способами.

1) Пр-во многочленов всюду плотно в $C^1[0,1]$ (сл-ие из теоремы Стоуна), $C^1[0,1]$ всюду плотно в $H^1(0,1) \Rightarrow \{1, x, x^2, \dots\}$ – базис в $H^1(0,1)$, состоящий из монотонов.

2) Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля вида

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x, 0 < x < 1, \\ x'(0) = 0, x'(1) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

На лекции #9 показать, что (обоб-

шённы) с.ф. задачи (9) образуют базис в $H^1(0,1)$, причём с.ф., отвечающие разным с.з., ортогональны в $H^1(0,1)$. Отсюда $\{\cos(j\pi x)\}_{j=0}^{\infty}$ — ортогональный (в смысле станд. скал. пр-ия) базис в $H^1(0,1)$.

В методе Рунца желательна ортогональность базиса в смысле формы с. Изложим общую схему. Пусть $\{e_0, \dots, e_{m-1}, \dots\}$ — базис в $H^1(0,1)$, зафиксируем $H_m = \text{Lin}(e_0, \dots, e_{m-1})$ и получим решение конечномерной задачи $E(u) \rightarrow \min, u \in H_m$.

Пусть $u^{(n)} = \arg \min_{u \in H_m} E(u)$, $u^{(n)} = c_0^{(n)} e_0 + \dots + c_{m-1}^{(n)} e_{m-1}$. Образует столбцы $C^{(n)} = (c_0^{(n)}, \dots, c_{m-1}^{(n)})^T$,

$v^{(n)} = (v_0^{(n)}, \dots, v_{n-1}^{(n)})$, где

$v_j^{(n)} = \langle v, e_j \rangle$, и матрицу Грама

$$G = (s(e_i, e_j))_{i,j=0}^{n-1}.$$

Из необходимого условия минимума
следует, что $c^{(n)} = G^{-1} v^{(n)}$.

Если базис $\{e_0, \dots, e_{n-1}, \dots\}$ S -
ортонормален, то G -диагональная
матрица и $c_j^{(n)} = \frac{v_j^{(n)}}{s(e_j, e_j)}$, $j=0, \dots, n-1$.

В нашем случае S -станд. скал.
произведение в $H^1(0,1)$, поэтому
выгоднее взять тригонометрический
базис $\{\cos(j\pi x)\}_{j=0}^{\infty}$. Имеем

$$v_j^{(n)} = \int_0^1 f(x) \cos(j\pi x) dx = \frac{1}{2} f_j,$$

где f_j - коэфф. Фурье $f \in L_2(0,1)$ в
этом же базисе;

$$s(e_j, e_j) = \int_0^1 (\pi^2 j^2 \sin^2(j\pi x) +$$

$$+ \cos^2(j\pi x) dx = \frac{1}{2} (\pi^2 j^2 + 1).$$

Получаем $c_j^{(m)} = \frac{\frac{1}{2} f_j}{\frac{1}{2} (\pi^2 j^2 + 1)} = \frac{f_j}{\pi^2 j^2 + 1}.$

Итак, если разложение ф-ии f в пр-ве $L_2(0,1)$ имеет вид

$$f(x) = \bar{f} + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \cos(j\pi x),$$

то обобщённое решение краевой задачи (6) представляется рядом

$$u(x) = \bar{f} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\pi^2 j^2 + 1} \cos(j\pi x),$$

который сходится в $H^1(0,1)$.

Замечание: $\bar{f} = \frac{f_0}{2} = \int_0^1 f(x) dx -$

среднее значение ф-ии f .

Задача 2.6. Пусть $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ - квадрат, $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}((1+x^2 y) \nabla u)$.

Рассмотрим краевую задачу

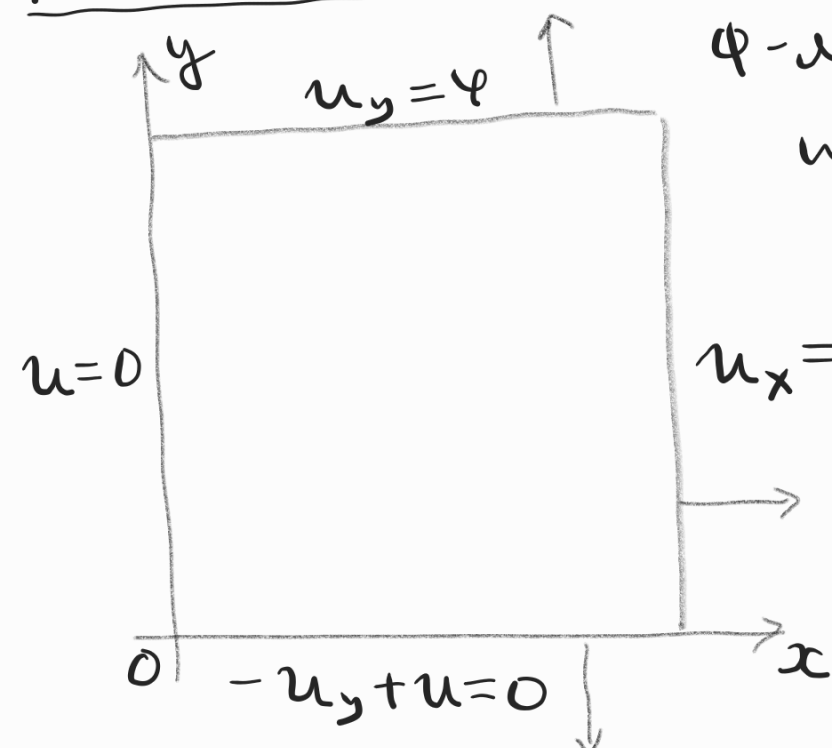
для дивергентного равномерно эллиптического уравнения $\mathcal{L}u = f(x, y)$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=1} = 0, \\ -u_y + u|_{y=0} = 0, \\ u_y|_{y=1} = \varphi(x). \end{cases} \quad (10)$$

Построить ф-лу энергии, получить и решить методом Рунта вариационную задачу. Предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(0, 1)$.

Решение.

Алгоритм построения ф-лы энергии остаётся прежним:



1) дать определение обобщённого решения задачи (10);

- 2) интерпретировать это определение как необходимое условие экстремали;
- 3) восстановить φ -л энергии.

Есть способ автоматически (быстро) восстановить φ -л энергии по оператору $\mathcal{L}$ и краевым условиям, его используем позже.

Пусть $u \in H^2(\Omega)$ — сильное решение краевой задачи (10). Умножим ур-ие $\mathcal{L}u = f(x, y)$ на пробную φ -ию $v \in H^1(\Omega)$, проинтегрируем по Ω , применим первую φ -лу Грина:

$$\iint_{\Omega} (1+x^2y) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} (1+x^2y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} v \Big|_{\partial\Omega} \, dS = \iint_{\Omega} f(x, y) v \, dx \, dy. \quad (11)$$

Преобразуем интеграл по $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} (1+x^2y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} v \Big|_{\partial\Omega} \, dS = \int_0^1 - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} v \Big|_{y=0} \, dx + \int_0^1 (1+y) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} v \Big|_{x=1} \, dy +$$

$$+ \int_0^1 (1+x^2) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} v \Big|_{y=1} dx + \\ + \int_0^1 - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} v \Big|_{x=0} dy.$$

Принимая во внимание краевые условия $-\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -u \Big|_{y=0}$, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$,

$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = \varphi(x)$, требуя от пробной ф-ии $v \Big|_{x=0} = 0$, преобразуем интегральное равенство: (12)

$$\iint_{\Omega} (1+x^2 y) \nabla u \cdot \nabla v + \int_0^1 u \Big|_{y=0} v \Big|_{y=0} dx = \\ = \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy + \int_0^1 (1+x^2) \varphi(x) v \Big|_{y=1} dx.$$

Введём пр-во $H = \{u \in H^1(\Omega) : u \Big|_{x=0} = 0\}$.

Определение. Ф-я $u \in H$ называется обобщённым решением краевой задачи (10), если для любой $v \in H$ выполнено интегральное равенство (12).

Зададим в пр-ве H форму

$$s(u, v) = \iint_{\Omega} (1+x^2y) \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \int_0^1 u|_{y=0} v|_{y=0} dx \text{ и линейный}$$

функционал $\langle l, v \rangle = \iint_{\Omega} f(x, y) v dx dy + \int_0^1 (1+x^2) \varphi(x) v|_{y=1} dx$. Определе-

ние означает, что

$$\forall v \in H \quad s(u, v) - \langle l, v \rangle = 0. \quad (13)$$

Интерпретируем (13) как необходи-

мое условие минимума ф-ла

$$E(u) = s(u, u) - 2\langle l, u \rangle \text{ на пр-ве } H.$$

В явном (интегральном) виде

$$E(u) = \iint_{\Omega} (1+x^2y) |\nabla u|^2 dx dy + \int_0^1 u|_{y=0}^2 dx - 2 \iint_{\Omega} f(x, y) u dx dy - 2 \int_0^1 (1+x^2) \varphi(x) u|_{y=1} dx. \quad (14)$$

По теореме об эквивалентной
 норме форма S задаёт скалярное
 произведение в H , порождающее
 норму, эквивалентную стандартной.
 Легко проверить, что ℓ -ограничен-
 ный лнн. ф-л на H . По теореме
 об экстремали $\exists! \hat{u} = \arg \min_{u \in H} E(u)$.

Построить пош-ть Рунга в H ,
 которая сходится (в смысле нормы)
 к $\hat{u}$. Прежде всего нужно задать
 базис в H . Есть как 2 варианта:

1) полиномиальный базис

$$\{x^{k+j} y^j\}_{k,j=0}^{\infty}$$

2) тригонометрический базис

$$\{\sin(\pi(k+1/2)x) \cos(\pi j y)\}_{k,j=0}^{\infty}$$

Или тот или другой ортогональ-
 ными в H относительно скаляр-

ного произведения, задаваемого формой S , не будут.

Пусть $\{\tilde{e}_{kj}\}_{k,j=0}^{\infty}$ — какой-нибудь из двух указанных базисов в пространстве H . Для $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим подпр-во размерности N^2 , построенное на базисных ф-ях $\tilde{e}_{00}, \dots, \tilde{e}_{N-1,N-1}$. Перенумеруем каким-то образом базис. ф-и с помощью единственного индекса $m = 0, \dots, N^2 - 1$ (например, $e_0 = \tilde{e}_{00}, e_1 = \tilde{e}_{10}, e_2 = \tilde{e}_{01}, e_3 = \tilde{e}_{20}, e_4 = \tilde{e}_{11}, e_5 = \tilde{e}_{02}, e_6 = \tilde{e}_{30}, \dots, e_{N^2-2} = \tilde{e}_{N-2,N-1}, e_{N^2-1} = \tilde{e}_{N-1,N-1}$).

• Построим матрицу Грама

$$G = (g_{lm})_{l,m=0}^{N^2-1}, \text{ где}$$

$$g_{lm} = S(e_l, e_m) = \iint_{\Omega} (1 + x^2 y).$$

$$\left(\frac{\partial e_e}{\partial x} \cdot \frac{\partial e_n}{\partial x} + \frac{\partial e_e}{\partial y} \cdot \frac{\partial e_n}{\partial y} \right) dx dy + \int_0^1 e_e(x, 0) e_n(x, 0) dx.$$

G — симметрическая положительно определённая м-ца порядка N^2 .

Замечание. В наших интересах, чтобы м-ца Грама G была диагональной, поэтому базис $e_0, e_1, \dots, e_{N^2-1}$ желательно ортогонализировать по Граму — Шмидту. Однако, в моей программе ортогонализация не реализована. В методе Рунге она не требуется.

• Построим столбец Φ , соответствующий граничной ф-ии $\varphi \in L_2(0, 1)$ в краевом условии $u_y|_{y=1} = \varphi(x)$:
 $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N^2-1})^T,$

$$\psi_m = \int_0^1 (1+x^2) \psi(x) e_m(x, 1) dx.$$

• Построим столбец $F = (f_0, \dots, f_{N^2-1})^T$,
который отвечает правой части
 $f \in L_2(\Omega)$:

$$f_m = \iint_{\Omega} f(x, y) e_m(x, y) dx dy.$$

Пусть $u^{(N)} = \sum_{m=0}^{N^2-1} c_m^{(N)} e_m$,

$c = (c_0^{(N)}, \dots, c_{N^2-1}^{(N)})^T$, тогда отно-

сительно с задачей минимизации

$$c^T G c - 2 c^T (\Phi + F) \rightarrow \min, c \in \mathbb{R}^{N^2-1}.$$

Её решение удовл. системе
линейных ур-ий

$$(15) G c = \Phi + F \Rightarrow c = G^{-1} (\Phi + F).$$

Замечание. Можно не делать
ортогонализацию и не обращать
м-ую G , но решить систему (15) тем
или иным численным методом.

Позже я разберу краевую задачу

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u|_{x=0} = \psi(y), u_x|_{x=1} = 0, \\ -u_y + u|_{y=0} = 0, \\ u_y|_{y=1} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

с неоднородным условием Дирихле ($\mathcal{L}$ — тот же оператор, что в задаче (10)).

Схема построения краевой задачи для уравнения $\mathcal{L}u = f$ с $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(k(x, y)\nabla u) + c(x, y) - 2D$ дивергентный равномерно эллиптический оператор.

• $H = \{u \in H^1(\Omega) : \text{краевые усл-я Дирихле}\}$ — пр-во обобщённых решений. В случае неоднородных

условий Дирихле H -замкнутое
аффинное подпр-во в $H^1(\Omega)$. На
 пр-ве H определён ф-л энергии.
 Для задачи (16)

$$H = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{x=0} = \varphi(y)\}.$$

• $\tilde{H} = \{u \in H^1(\Omega) : \text{соответствующие}$
 однородные условия Дирихле} $\}$ —
 пр-во пробных функций. Всегда
 $\tilde{H}$ — замкнутое линейное подпр-во
 в $H^1(\Omega)$. Для задачи (16)

$$\tilde{H} = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{x=0} = 0\}$$

Замечание. у задачи (10)

$$H = \tilde{H} = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{x=0} = 0\}.$$

• Функционал энергии имеет вид

$$E(u) = \iint_{\Omega} (k(x,y) |\nabla u|^2 + c(x,y) u^2) dx dy -$$

$$- 2 \iint_{\Omega} f(x,y) u dx dy + \text{члены, зависящие}$$

от краевых усл-ий

а) От условий Дирихле φ - u энергии не зависит.

б) Условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = \varphi$ соответствует линейному члену

$$-2 \int_{\Gamma} k|_{\Gamma} \varphi u|_{\Gamma} dS$$

в φ -ле энергии.

в) Условие Робена $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \sigma u|_{\Gamma} = \varphi$

отвечают квадратичный и линейный члены

$$+ \int_{\Gamma} k|_{\Gamma} \sigma u|_{\Gamma}^2 dS - 2 \int_{\Gamma} k|_{\Gamma} \varphi u|_{\Gamma} dS.$$