

Тема 1 "Красивые задачи: разделение переменных в полярных и сферических координатах": часть 3

Задача 1.5. Методом разделения переменных решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| < R\}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } B_R, \\ u|_{S_R} = \varphi. \end{cases} \quad (1.26)$$

Решение В сферических координатах задача (1.26) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0,$$

$$0 < \rho < R, 0 < \theta < \pi, -\infty < \tau < +\infty,$$

$$u(\rho, \theta, \tau + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta, \tau), \quad \text{— периодическое условие}$$

Как записать асимптотическое условие? Сфер. система имеет особенность на диаметре SN , где $S(0; 0; -R), N(0; 0; R)$ - полюсы.

Мы требуем, чтобы решение u оставалось ограниченной ф-ей при стремлении точки к SN . В сферических координатах это может быть оформлено так: 

$$\sup_{\theta, \tau} |u(s, \theta, \tau)| = O(1), s \rightarrow +0.$$

Последнее означает, что на каждой сфере S_s u - ограниченная ф-я, и $\sup_{S_s} |u|$ ограничен, если $s \rightarrow +0$.

I. Рассмотрим специальную задачу вида

$$(1.27) \left\{ \begin{array}{l} \Delta U = 0, 0 < s < R, 0 < \theta < \pi, -\infty < \tau < \infty, \\ U(s, \theta, \tau + 2\pi) \equiv U(s, \theta, \tau), \\ \sup_{\tau} |U(s, \theta, \tau)| = O(1), \theta \rightarrow +0 \text{ либо} \end{array} \right.$$

$\theta \rightarrow \pi - \theta$ для каждого $s \in (0, R)$.

Сделаем подстановку Фурье

$$V(s, \theta, \tau) = Z(s) Y(\theta, \tau) \text{ в (1.27):}$$

$$Z''(s) Y(\theta, \tau) + \frac{2}{s} Z'(s) Y(\theta, \tau) + \\ + \frac{1}{s^2} Z(s) Y_{\theta\theta}(\theta, \tau) + \frac{1}{s^2 \sin^2 \theta} Z(s) Y_{\tau\tau}(\theta, \tau) + \\ + \frac{\cos \theta}{s^2 \sin \theta} Y_{\theta}(\theta, \tau) = 0. \text{ Разделим}$$

переменные:

$$s^2 \frac{Z''(s)}{Z(s)} + 2s \frac{Z'(s)}{Z(s)} = - \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} - \\ - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} - \frac{\cos \theta}{Y \sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} = \lambda = \text{const.}$$

Отноительно $Y = Y(\theta, \tau)$ имеем спектральную задачу 1.4 (задача о с.з. и с.ф. оп-ра $-\Delta$ на S^2).

$$\lambda_m = m(m+1) - \text{с.з. КР-Тн}$$

$$r_m = 2m + 1 \leadsto Y_{mk} = Y_{mk}^{(1/2)}(\theta, \tau) -$$

сферические ф-ии ($k=0/1, \dots, m$).

Получим и решим ур-ие отн. $z=z(s)$:

$$s^2 z'' + 2s z' - m(m+1)z = 0.$$

Подстановка $z(s) = s^s$ даёт

$$s^2 s(s-1) s^{s-2} + 2s s s^{s-1} - m(m+1) s^s = 0$$

$$s^2 + s - m(m+1) = 0$$

$$s_1 = -m-1, s_2 = m \Rightarrow \text{общее реш-ие}$$

$$z(s) = C s^{-m-1} + D s^m.$$

II. Разложим граничную ф-ию

$\varphi \in L_2(S_R)$ (на самом деле

$\varphi \in H^{1/2}(S_R)$ в ряд по сферическим

ф-м. В явном виде этот ряд
представляет собой:

$$\varphi(\theta, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_{m0} P_m(\cos \theta) + \sum_{k=1}^m \sin^k \theta.$$

$$P_m^{(k)}(\cos \theta) [a_{mk} \cos(k\tau) + b_{mk} \sin(k\tau)],$$

$$\text{Use } a_{mk} = \frac{1}{\pi} \frac{2m+1}{2} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int_0^{2\pi} d\tau$$

$$\int_0^{\pi} \varphi(\theta, \tau) \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) \cos(k\tau) \sin \theta d\theta$$

$$b_{mk} = \frac{1}{\pi} \frac{2m+1}{2} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{\pi} \varphi(\theta, \tau) \sin^k \theta.$$

$$P_m^{(k)}(\cos \theta) \sin(k\tau) \sin \theta d\theta.$$

Решение задачи (1.26) будем

искать в виде аналогичного ряда:

$$u(s, \theta, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} A_{m0}(s) P_m(\cos \theta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sin^k \theta \cdot P_m^{(k)}(\cos \theta) [A_{mk}(s) \cos(k\tau) +$$

$$+ B_{mk}(s) \sin(k\tau)], A_{m0}, A_{mk}, B_{mk} - ?$$

краевое условие Дирихле

Сразу даёт, что $A_{mk}(R) = a_{mk}$,
 $B_{mk}(R) = b_{mk}$. Применяв асимпто-
 тическое условие к каждому члену
 ряда, получим

$$A_{mk}, B_{mk} = \underline{O}(1), s \rightarrow +0.$$

Крайевые задачи для коэфф-ов
 A_{mk} имеют вид:

$$\begin{cases} s^2 A_{mk}'' + 2s A_{mk}' - m(m+1) A_{mk} = 0, \\ A_{mk}(s) = \underline{O}(1), \\ A_{mk}(R) = a_{mk} \end{cases} \quad 0 < s < R,$$

(для B_{mk} задачи аналогичные).

Решения: $A_{mk}(s) = a_{mk} \left(\frac{s}{R}\right)^m,$

$$B_{mk}(s) = b_{mk} \left(\frac{s}{R}\right)^m.$$

Таким образом, ряд Фурье,
 представляющий решение задачи
 Дирихле (1.26), суть

$$u(\varrho, \theta, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^m \left[\frac{1}{2} a_{m0} P_m(\cos \theta) + \sum_{k=1}^m \sin^k \theta P_m^{(k)}(\cos \theta) (a_{mk} \cos(k\tau) + b_{mk} \sin(k\tau)) \right]$$

Возьмём, к примеру

$\psi(\tau, \theta) = \sin \theta (\sin \tau + \cos \tau \cos \theta + \sin \theta)$. Представим ψ в виде ряда (в действительности, конечной суммы) по сферическим ф-я.

$$P_0(\cos \theta) = 1, P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \\ P_1'(\cos \theta) = 1, P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \\ P_2'(\cos \theta) = 3 \cos \theta, P_2''(\cos \theta) = 3.$$

Возьмем первые сфер. ф-ии:

$$\lambda = 0 \rightarrow Y_{00}^{(1)} = 1$$

$$\lambda = 2 \rightarrow Y_{10}^{(1)} = P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$$

$$Y_{11}^{(1)} = \sin \theta \cos \tau, \quad Y_{11}^{(2)} = \sin \theta \sin \tau$$

$$\lambda = 6 \rightarrow Y_{20}^{(0)} = P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$$

$$Y_{21}^{(1)} = 3 \sin \theta \cos \theta \cos \tau,$$

$$Y_{21}^{(2)} = 3 \sin \theta \cos \theta \sin \tau,$$

$$Y_{22}^{(1)} = 3 \sin^2 \theta \cos 2\tau,$$

$$Y_{22}^{(2)} = 3 \sin^2 \theta \sin 2\tau.$$

$$\varphi(\theta, \tau) = \sin^2 \theta + \sin \theta \sin \tau +$$

$$+ \sin \theta \cos \theta \cos \tau$$

$\frac{1}{3} Y_{21}^{(1)}$

$Y_{11}^{(2)}$

$$1 - \cos^2 \theta =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} (2 P_2 \cos \theta + 1) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2(\cos \theta)$$

$$\frac{2}{3} Y_{00}^{(1)} - \frac{2}{3} Y_{20}^{(1)}$$

Следовательно,

$$\varphi(\theta, \tau) = \underbrace{\frac{2}{3} Y_{00}^{(1)}}_{\lambda_0=0} + \underbrace{Y_{11}^{(2)}}_{\lambda_1=2} - \underbrace{\frac{2}{3} Y_{20}^{(1)} + \frac{1}{3} Y_{21}^{(1)}}_{\lambda_2=6}$$

Тогда решение задачи Дирихле
с таким ф-ей φ имеет вид:

$$u(r, \theta, \tau) = \frac{2}{3} Y_{00}^{(1)} + \frac{\rho}{R} Y_{11}^{(2)} + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \cdot$$

$$\left(\frac{1}{3} Y_{21}^{(1)} - \frac{2}{3} Y_{20}^{(1)} \right) = \frac{2}{3} + \frac{\rho}{R} \sin \theta \sin \bar{u} t$$

$$+ \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \left(\sin \theta \cos \theta \cos \tau - \cos^2 \theta + \frac{1}{3} \right).$$