

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ И МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Для всех вариантов, кроме 4, 7, 10, 13, 16, 19, 24, 25, 27, 30, 33, 37, 39: рассматривается начальная задача на действительной прямой для линейного эволюционного оператора второго порядка (параболического или гиперболического типа) с постоянными коэффициентами, либо начально-краевая задача на полупрямой с условием Дирихле или условием Неймана на конце. Требуется получить интегральную формулу для решения задачи. Для этого:

- 1) методом преобразования Фурье построить фундаментальное решение оператора задачи;
- 2) при необходимости сделать редукцию к однородным краевым условиям, если речь идёт о начально-краевой задаче;
- 3) для начально-краевых задач: осуществить нечётное/чётное продолжение данных редуцированной задачи в область $x < 0$ в зависимости от рода краевого условия;
- 4) преобразованием Фурье по пространственной переменной x получить задачу Коши для фурье-образа решения;
- 5) обратным преобразованием Фурье получить формулу интегрального представления решения, принимая в расчёт построенное в первом пункте фундаментальное решение;
- 6) для начально-краевых задач: от интегрирования по прямой $-\infty < x < \infty$ в полученной формуле перейти к интегрированию по лучу $0 \leq x < \infty$;
- 7) применяя интегральную формулу, найти единственное решение начальной/начально-краевой задачи с указанными правыми частями;
- 8) визуализировать в математических средах полученное в предыдущем пункте решение.

Для вариантов 4, 7, 10, 13, 16, 19, 24, 25, 27, 30, 33, 37, 39: построить фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, используя преобразование Фурье по части переменных и/или метод спуска. Считать известными фундаментальное решение оператора Лапласа, оператора теплопроводности и волнового оператора.

Ресурсы для решения задания #4

1. Материалы практической темы «Операции над обобщёнными функциями»: **третья** часть.
2. [Примеры](#) решения инд. задания #4, **видео** с разбором этих примеров.
3. Владимир В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х. Сборник задач по уравнениям математической физики. М: Физматлит, 2001.
4. Пикунин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд., стереотипное. М.: МЦНМО, 2004.

5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979.

Номер варианта студента/студентки вычисляется по формуле: **1 плюс остаток от деления (PDE id — 1) на 40**. Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2024/25 уч.г.**

Список вариантов

Вариант 1. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$ $f(x, t) = -2e^{-t} \cos x, \varphi(x) = \sin x.$	Вариант 2 $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x, t), -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$ $f(x, t) = -2e^{-2t} \cos x, \varphi(x) = \cos x.$
Вариант 3. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = \sin t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$ $f(x, t) = x(\cos t - \sin t), \varphi(x) = 0.$	Вариант 4. Построить фундаментальное решение телеграфного оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2m \frac{\partial}{\partial t},$ где $m = \text{const}$. Проанализировать его зависимость от параметра m.
Вариант 5. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 5u_x, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x); \end{cases}$ $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 2e^{-x}.$	Вариант 6. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 5u, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x); \end{cases}$ $\varphi(x) = e^{-2x}, \psi(x) = 0.$
Вариант 7. Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^n$ для $n > 4$.	Вариант 8. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_t + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = 0; \end{cases}$ $f(x, t) = x^2(\sin t - \cos t) - 2 \cos, \varphi(x) = x^2.$
Вариант 9. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = \sin t, \\ u _{t=0} = 0, u_t _{t=0} = \psi(x); \end{cases}$ $f(x, t) = 2 \sin t \sin x, \psi(x) = \cos x.$	Вариант 10. Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^2$.

Вариант 11. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = e^{-t}, \\ u _{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$ $f(x, t) = -2e^{-t}(1+x), \varphi(x) = 1+x.$	Вариант 12. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u_x + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = \cos t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = 0; \end{cases}$ $f(x, t) = (-x^2 + 6x - 3) \cos t, \varphi(x) = 1+x^2.$
Вариант 13. Построить фундаментальное решение эллиптического оператора $\Delta - k^2$ ($k > 0$) в $\mathbb{R}^2$.	Вариант 14. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$ $f(x, t) = -x^2 \sin t - 2 \cos t, \varphi(x) = x^2.$
Вариант 15. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x); \end{cases}$ $\varphi(x) = \sin x, \psi(x) = -\sin x.$	Вариант 16. Построить фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ ($k > 0$) в $\mathbb{R}^3$.
Вариант 17. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x); \end{cases}$ $\varphi(x) = 0, \psi(x) = \cos x.$	Вариант 18. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x - u + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = 1, \\ u _{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$ $f(x, t) = e^{-t}(\sin x - \cos x) + 1, \varphi(x) = \sin x + 1.$
Вариант 19. Построить фундаментальное решение оператора $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial x} - c$. Выяснить его зависимость от параметров b и c.	Вариант 20. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_t + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = \nu(t), \\ u _{t=0} = 0, u_t _{t=0} = 0; \end{cases}$ $f(x, t) = (t^2 - 2t + 2) \cos x, \nu(t) = t^2.$
Вариант 21. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = \nu(t), \\ u _{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$ $\nu(t) = e^{-t}, \varphi(x) = \sin x.$	Вариант 22. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = 0; \end{cases}$ $f(x, t) = \cos t \sin x, \varphi(x) = \sin x.$

Вариант 23. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = \nu(t), \\ u _{t=0} = x + 1, u_t _{t=0} = \psi(x); \\ \nu(t) = e^{-t}, \psi(x) = -x - 1. \end{cases}$	Вариант 24. Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^4$.
Вариант 25. Построить фундаментальное решение оператора Клейна-Гордона-Фока $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m^2$ ($m > 0$). Выяснить зависимость фундаментального решения от параметра m.	Вариант 26. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x); \\ f(x, t) = e^{-t} \cos x, \varphi(x) = \cos x. \end{cases}$
Вариант 27. Построить фундаментальное решение оператора $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} + \mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$.	Вариант 28. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = \nu(t), \\ u _{t=0} = \varphi(x); \\ \nu(t) = e^{-t}, \varphi(x) = e^{-x}. \end{cases}$
Вариант 29. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = \cos t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), \\ f(x, t) = x - e^{-x} \sin t, \varphi(x) = e^{-x} + x. \end{cases}$	Вариант 30. Построить фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ ($k > 0$) в $\mathbb{R}^2$.
Вариант 31. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = e^{-t}, \\ u _{t=0} = \varphi(x); \\ f(x, t) = 1 + e^{-t} \sin x, \varphi(x) = \sin x + 1. \end{cases}$	Вариант 32. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = \cos t, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = 0; \\ f(x, t) = -2 \cos t \cos x, \varphi(x) = \sin x - 1. \end{cases}$
Вариант 33. Построить фундаментальное решение билапласиана Δ^2 в $\mathbb{R}^3$.	Вариант 34. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u_x + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = \sin t, \\ u _{t=0} = 0, u_t _{t=0} = \psi(x); \\ f(x, t) = e^{-x} \sin t, \psi(x) = e^{-x}. \end{cases}$

Вариант 35. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, 0 < x < +\infty, 0 < t < T, \\ u_x _{x=0} = \nu(t), \\ u _{t=0} = \varphi(x); \\ \nu(t) = e^{-2t}, \varphi(x) = \sin x. \end{cases}$	Вариант 36. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u_x _{x=0} = \nu(t), \\ u _{t=0} = 0, u_t _{t=0} = 0; \\ f(x, t) = (t^2 - 2t + 2) \sin x, \nu(t) = t^2 - 2t. \end{cases}$
Вариант 37. Построить фундаментальное решение оператора Шрёдингера $i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ ($m > 0$) с гамильтонианом свободной частицы в трёхмерном евклидовом пространстве.	Вариант 38. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x - u, 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u _{x=0} = \nu(t), \\ u _{t=0} = \varphi(x); \\ \nu(t) = e^{-t}, \varphi(x) = e^{-x}. \end{cases}$
Вариант 39. Построить фундаментальное решение эллиптического оператора $\Delta - k^2$ ($k > 0$) в $\mathbb{R}^3$.	Вариант 40. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u_x - u, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u _{t=0} = \varphi(x), u_t _{t=0} = \psi(x); \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = 2e^{-x}. \end{cases}$