

Лекция #8

Тема 2 "Эллиптические операторы второго порядка"

Задача Дирихле для ур-ия с общим равномерно эллиптическим оператором (2.1), если $\vec{b} \neq 0$ или $\vec{b}$ принимает отрицательные значения, может не иметь решений или иметь ∞ много решений. Фредгольмова разрешимость — приемлемое расширение понятия корректности краевых задач. Неформально говоря, она означает разрешимость с точностью до конечномерных пространств.

Пусть $L: H \rightarrow V$ — ограниченный оп-р между гильбертовыми пр-ми. Рассмотрим операторное ур-ие

$$Lu = F \quad (2.22)$$

с неизвестной $u \in H$, известной правой частью $F \in H$.

Определение 2.9. Оператор $L: H \rightarrow V$ фредгольмов, если он имеет конечномерные ядро и коядро:

1) $\dim \operatorname{Ker} L < \infty$; 2) $\dim \operatorname{Coker} L < \infty$.

Число $\operatorname{ind} L = \dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{Coker} L$ называется индексом фредгольмова оператора.

- $\operatorname{Ker} L = \{u \in H : Lu = 0\}$ — ядро ограниченного оператора L , всегда замкнутое в H подпр-во;
- $\operatorname{Im} L = \{F \in V : \exists u \in H Lu = F\}$ — образ ограниченного оп-ра L , не всегда замкнут;
- $\operatorname{Coker} L = (\operatorname{Im} L)^\perp = \{v \in V : \forall F \in \operatorname{Im} L (F, v)_V = 0\}$ — коядро оператора L (это ортогональное дополнение образа. Всегда замкнутое подпр-во в V).

Нетрудно видеть, что если $\dim \operatorname{Coker} L < \infty$, то $\operatorname{Im} L$ — замкнутое подпр-во (докажите). Далее, коядро L совпадает с ядром сопряжённого оп-ра: $\operatorname{Coker} L = \operatorname{Ker} L^*$. Действительно, $L^*: V \rightarrow H$, $(F, v)_V = (Au, v)_V = (u, A^*v)_H$ для $\forall u \in H \Rightarrow A^*v = 0$.

Условие на коядро в определении 2.9 говорит о том, что уравнение (2.21) разрешимо $\Leftrightarrow F \perp v_j; \forall j=1, \dots, d$, $\{v_1, \dots, v_d\}$ — базис пр-ва решений ур-ня $A^*v = 0$. (2.23)

Теорема 2.4. Пусть H — гильбертово пр-во, $K: H \rightarrow H$ — компактный оп-р, тогда $I - K$ — фредгольмов оп-р с нулевым индексом (I — тожд. оп-р).
Доказательство. 1) Обозначим $L = I + K$.
 $\forall u \in \operatorname{Ker} L \quad Ku = u$, т.е. $\operatorname{Ker} L$ — инва-

риантное позпр-во K , на котором
этот компактный оп-р тождествен $\Rightarrow$
 $\dim \text{Ker } L < \infty$, потому что тождественные
оп-ры компактны только в конечномер-
ных пространствах.

2) Рассмотрим ортогональные
дополнение $\text{Coker } L = (\text{Im } L)^\perp$ в H -
ядро сопряжённого оп-ра $L^* =$
 $=(I + K^*) = I + K^*$. Поскольку K^* -
тоже компактный оп-р, рассуждая
как в п.1 получим $\dim \text{Coker } L < \infty$.

3) (альтернатива Фредгольма).
 L -инъективен $\Leftrightarrow L$ -сюръективен
(док-во см. в А.Я.Хелемский. Лекции
по ФАНУ. М.: МЦНМО, 2004, на стр.
288; там L обозначается S , $H = E$ -
бахахово пр-во).

4) Док-во $\text{ind } L = 0$ также см.

в А.Я.Хелемский. Лекции по ФАНУ.

Замечания.

- 1) Теорема 2.4 остаётся верна, если H — банахово п-во, но теперь $\text{Coker } L = H / \text{Im } L$ — факторп-во.
- 2) Если в теореме 2.4 тожд. оп-р I заменить на топологический изоморфизм, то вывод не изменится.
- 3) С. М. Никольский доказал: оп-р $L: H \rightarrow V$ фредгольмов $\Leftrightarrow$ $\exists$ оп-р $M: V \rightarrow H$ т.ч. $ML = I_H - K_1$, где $K_1 \in \mathcal{K}(H)$, $LM = I_V - K_2$, где $K_2 \in \mathcal{K}(V)$ (иными словами, L фредгольмов $\Leftrightarrow$ его класс смежности $L + \mathcal{K}(H, V)$ суть изоморфизм в фактор-категории $\text{Ban}/\mathcal{K}$). При этом оп-р M можно выбрать так, что K_1 и K_2 конечномерны.

4) Если $L: H \rightarrow V$ - Фредгольмов
оп-р, $K \in \mathcal{K}(H, V)$, то $\text{ind } L = \text{ind}(L+K)$.

5) (мультипликативное св-во индекса).

Пусть $L: H \rightarrow V$, $M: V \rightarrow W$ - Фредголь-
мовы оп-ры, тогда $ML: H \rightarrow W$ -
тоже Фредгольмов оп-р и

$$\text{ind}(ML) = \text{ind } M + \text{ind } L.$$

6) Фредгольмов оп-р $L: H \rightarrow V$
имеет индекс $0 \Leftrightarrow L = I - K$, где
 $I: H \rightarrow V$ - тождественный изоморфизм,
 $K: H \rightarrow V$ - компактный оп-р (или
даже конечномерный).

Проблема в том, что определения
2.6 и 2.7 не сформулированы в
терминах операторных ур-ий, их
ещё нужно получить.

Рассмотрим задачу Неймана вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x), x \in \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{n} |_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \quad (2.24)$$

Предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$.
В пр-ве $H^1(\Omega)$ рассмотрим скал. произведение

$$(u, v)' = \int_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx,$$

порождающее норму $\|\cdot\|'$, эквивалентную стандартной. Перепишем инт. тожд-во из определения 2.7 в виде

$$(u, v)' - \langle \ell_2(u), v \rangle = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (\varphi, Tv)_{L_2(\partial\Omega)}, \text{ где } T: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$$

-оп-р следа, $\langle \ell_2(u), v \rangle = \int_{\Omega} uv dx$.

Построим компактный ол-р

$$K_N: H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega), \text{ удовл. тому св-ву,}$$

что $\forall u, v \in H^1(\Omega)$

$$(K_N u, v)' = \langle \ell_2(u), v \rangle.$$

Покажем, что φ -л $l_2(u) \in H^1(\Omega)^*$,
даже если $u \in L_2(\Omega)$:

$$|\langle l_2(u), v \rangle| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \beta \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|'_{H^1(\Omega)}.$$

По теореме Рисса $\exists \tilde{K}u \in H^1(\Omega)$,
представляющая φ -л $l_2(u)$:

$$\langle l_2(u), v \rangle = (\tilde{K}u, v)' \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Получили обратный линейный
оп-р $\tilde{K}: L_2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, причём
 $\|\tilde{K}\| \leq \beta$. Положим $K_N = \tilde{K}J$, где
 $J: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ — компактный
оп-р вложения (по теореме 1.11).
Следовательно, K_N — тоже компактный
оп-р, $\|K_N\| \leq \beta$.

Перепишем инт. тожд-во так:

$$\begin{aligned} ((I - K_N)u, v)' &= \langle l, v \rangle, \text{ где } \langle l, v \rangle = \\ &= \int_{\Omega} f(x) v \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v|_{\partial\Omega} \, dS. \end{aligned}$$

Оценим функционал ℓ :

$$|\langle \ell, v \rangle| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq \beta (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) \|v\|'.$$

По теореме Рисса $\exists! F \in H^1(\Omega)$,
представляющая функционал ℓ :

$$\langle \ell, v \rangle = (F, v)' \text{ для любой } v \in H^1(\Omega).$$

$$\text{При этом } \|F\|' = \|\ell\|^* \leq \beta (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|T\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}). \text{ Следовательно,}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad (u, v)' - (K_N u, v)' = (F, v)' \Rightarrow$$

операторное ур-ие для обобщённых
решений задачи Неймана (2.24):

$$(I - K_N)u = F. \quad (2.25)$$

По теореме 2.4 оп-р $I - K_N$

Фредгольмов, его индекс равен нулю.

Ядро оп-ра $I - K_N = 0$ состоит из констант — обобщ. решений задачи (2.24) при $f=0, \varphi=0$.

В самом деле $((I - K_N)u, v)' = 0$ для всех $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0. \text{ Положим } v = u:$$
$$0 = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq \gamma \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \Rightarrow$$

$$\nabla u = 0 \Leftrightarrow u = C \Rightarrow \ker(I - K_N) = \text{Lin}\{1\}.$$

Оператор K_N самосопряжен:

$$(K_N u, v)' = \langle l_2(u), v \rangle = \int_{\Omega} uv \, dx =$$

$$= \langle l_2(v), u \rangle = (u, K_N v)'. \text{ Тогда}$$

$$\text{Coker}(I - K_N) = \ker(I - K_N)^* =$$

$$= \ker(I - K_N) = \text{Lin}\{1\}.$$

Получим критерий разрешимости задачи Неймана (2.24). В неявном виде: $F \perp 1$ в $H^1(\Omega)$ (отн. скал. произведения $(\cdot, \cdot)'$). Имеем $(F, 1)' = 0 \Leftrightarrow \langle \ell, 1 \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \psi(x) dS = 0. \quad (2.26)$$

(формулируем теперь результат о Фредг. разр-ти задачи (2.24).

Предполагается, что $f \in L_2(\Omega), \psi \in L_2(\partial\Omega)$.

Теорема 2.5. Внутренняя задача Неймана (2.24) разрешима по Фредгольму: 1) пр-во решений однородной задачи (при $f=0, \psi=0$) состоит из констант; 2) обобщённое решение существует $\Leftrightarrow$ правые части удовлетворяют (2.26).

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле (2.3) для общего равномерно эллиптического оператора (2.1). Вспомним, что формально сопряжённый оп-р имеет вид

$$\mathcal{L}^* v = -\operatorname{div}(A(x) \nabla v) - \operatorname{div}(\vec{b}(x)v) + (c(x) + \operatorname{div} \vec{b}(x))v.$$

Поставим сопряжённую задачу Дирихле

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* u^* = 0 & \text{в } \Omega, \\ u^*|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

($u^* \in H_0^1(\Omega)$ — обозначение неизвестной ф-ии задачи (2.27)).

Теорема 2.6. Внутренняя задача Дирихле (2.3) для равномерно эллиптического оп-ра (2.1) разре-

шима по Фредгольму: 1) пространство решений однородной задачи (при $f=0, \varphi=0$) имеет конечную размерность d ; 2) обобщённое решение существует $\Leftrightarrow$ для каждого обобщённого решения $u^* \in H_0^1(\Omega)$ задачи (2.27) выполнено

$$\int_{\Omega} f(x) u^* dx = 0; \quad (2.28)$$

3) пр-во $\int_{\Omega}$ обобщённых решений сопряжённой задачи также имеет размерность d .

Задача 2.1. 1) предполагается, что $f \in L_2(\Omega), \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

2) критерий разрешимости (2.28) должен быть справедлив для d л.н. независимых обобщённых решений задачи (2.28).

Сопоставим внутренней задаче Робена (2.4) для общего равн. эллиптического ол-ра (2.1) сопряжённую задачу вида

$$\begin{cases} L^* u^* = 0 & \text{в } \Omega, \\ A(x) \nabla u^* \cdot \vec{\nu} + \tau(x) u^*|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

где L^* — формально сопряжённый оператор, $\tau(x) = b(x) + \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x)$.

Предположим, что $f \in L_2(\Omega), \varphi \in L_2(\partial\Omega)$.

Теорема 2.7. Внутренняя задача Робена (2.4) для равномерно эллиптического ол-ра (2.1) разрешима по Фредгольму: 1) пр-во обобщённых решений однородной задачи (при $f=0, \varphi=0$) имеет конечную размерность d ; 2) обобщённое решение

существует $\Leftrightarrow$ для каждого обобщённого решения $u^* \in H^1(\Omega)$ сопряжённой задачи справедливо

$$\int_{\Omega} f(x) u^* dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) u^* dS = 0; \quad (2.30)$$

3) пр-во обобщённых решений сопряжённой задачи (2.29) тоже имеет размерность d .

Док-ва теорем 2.6, 2.7 можно найти в:

1) В.П. Михайлов, А.К. Гузин.
Дополнительные главы курса
"Уравнения математической физики".

М.: МИАН, 2007;
2) Глава 6 "Эллиптические операторы
второго порядка" книги А.Е. Байкова
(скоро будет доступна на
<https://baikov.org/pdfbook65123>).