

Лекция #7

Тема 2 "Эллиптические операторы второго порядка"

стр. 19-21 лекции #6

Из ф-лы интегрирования по частям для ф-ий из пр-ва $H^1(\Omega)$ (утверждение 1.7) следует первая

ф-ла Грина для дивергентного равн. эллиптического оп-ра (2.2):
 $\forall u \in H^2(\Omega) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} v \mathcal{L}u \, dx = - \int_{\partial\Omega} A(x) \nabla u \cdot \vec{n} \Big|_{\partial\Omega} v \Big|_{\partial\Omega} \, dS + S_{\mathcal{L}}(u, v), \quad (2.14)$$

где

$$S_{\mathcal{L}}(u, v) = \int_{\Omega} (A(x) \nabla u \cdot \nabla v + c(x) uv) \, dx \quad (2.15)$$

— симметрическая билинейная форма, ассоциированная с оп-м (2.2).

Есть два способа определить
обобщённые решения задачи
Дирихле (2.8):

- 1) сказать, что обобщённое решение
задачи (2.8) удовл. необх. усл-ию
экстремали φ -ла энергии (2.9);
- 2) применить к сильному решению
первую φ -лу Грина (2.14), интерпре-
тировать результат как определение
обобщённого решения.

Второй способ подходит для задач
с общим равн. эллип. оп-м (2.1).

Определение 2.4. φ -ия $u \in H^1(\Omega)$
называется обобщённым решением
задачи (2.8), если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ и для
 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ выполняется инт. равенство

$$J_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} f(x) v dx. \quad (2.16)$$

Определение 2.5. Ф-ия $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Робена (2.10), если для любой пробной ф-ии $v \in H^1(\Omega)$ справедливо интегральное равенство

$$S_2(u, v) + \int_{\partial\Omega} \psi(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} dS = \int_{\Omega} f(x) v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v|_{\partial\Omega} dS. \quad (2.17)$$

Определим теперь обобщённые решения краевых задач (2.3) и (2.4) для ур-ия $\Delta u = f$ с общим равномерно эллиптическим оператором (2.1).

Пусть $u \in H^2(\Omega)$ — сильное решение задачи (2.3). Умножим ур-ие $\Delta u = f$ на пробную ф-ию $v \in H^1(\Omega)$, преобразуем некоторые члены в левой части с помощью ф-лы Грина по частям:

$$S_2(u, v) - \int_{\partial\Omega} A(x) \nabla u \cdot \vec{n} v|_{\partial\Omega} dS +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \vec{b}(x) \cdot \vec{\nu}(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} dS - \\ - \int_{\Omega} u (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} f(x) v dx.$$

Если теперь, как в определении 2.4, положить $v|_{\partial\Omega} = 0$, получим интегральные рав-во, определяющие обобщённые решения задачи (2.3).

Определение 2.6. Ф-ия $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Дирихле (2.3) для общего равномерно эллипт. оп-ра (2.1), если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ и для любой $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегр. равенство

$$S_2(u, v) - \int_{\Omega} u (\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} f(x) v dx. \quad (2.18)$$

Определение 2.7. Ф-ия $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщённым решением задачи Робена (2.4) для общего равномерно эллипт. оп-ра (2.1), если $\forall v \in H^1(\Omega)$ справедливо интегр. рав-во

$$S_L(u, v) + \int_{\partial\Omega} \tau(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} dS - \quad (2.19) \\ - \int_{\Omega} u(\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} f(x) v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v|_{\partial\Omega} dS$$

Определим ещё обобщённые решения ур-ия $Lu = f$ с оп-м (2.1).

Определение 2.8. Ф-ия $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ называется обобщённым решением ур-ия $Lu = f$ с общим равн. эллип. оператором (2.1), если для любой пробной ф-ии $v \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо интегральное равенство

$$S_L(u, v) - \int_{\Omega} u(\vec{b}(x) \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} f(x) v dx.$$

§ 4. Корректность и Фредгольмова разрешимость краевых задач

Условия на область, оп-р L и коэфф-т b : $\partial\Omega \in C^1$; $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$;

$i, j = 1, \dots, n$, равномерная эллиптичность,
 $b_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $i = 1, \dots, n$; $c \in C(\bar{\Omega})$; $b \in C(\partial\Omega)$.

Теорема 2.2. Пусть в дивергентном
 равномерно эллипт. оп-ре (2.2)
 коэфф-т $c \geq 0$ в Ω . Тогда для любых
 $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ задача
 Дирихле (2.8) имеет единственное
 обобщённое решение $u \in H^1(\Omega)$ и
 верна априорная оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad (2.20)$$

с независимыми от f и φ константа-
 ми C_1 и C_2 .

Доказательство. 1) По теореме 1.14 о
 поднятии (его тонкость здесь нам не
 нужна) $\exists w \in H^1(\Omega)$: $w|_{\partial\Omega} = \varphi$,
 $\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$, причём
 константа C не зависит от φ . У нас
 есть ограниченный оператор поднятия
 $L: H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$.

Сделаем редукцию $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ — остающаяся неизвестной ф-ия. Ф-я энергии преобразуется:

$$E_D(u_0 + w) = S_\varepsilon(u_0, u_0) + 2S_\varepsilon(u_0, w) - 2 \int_{\Omega} f(x) u_0 dx + S_\varepsilon(w, w) - 2 \int_{\Omega} f(x) w dx.$$

Обозначим $\tilde{E}_D(u_0) = S_\varepsilon(u_0, u_0) - 2\langle l, u_0 \rangle$, где $\langle l, u_0 \rangle = \int_{\Omega} f(x) u_0 dx - S_\varepsilon(u_0, w)$.

2) По теореме 1.15 об эквивалентной норме симметрическая билинейная форма $(u, v)' = S_\varepsilon(u, v) + \int_{\partial\Omega} u/\partial\Omega v/\partial\Omega dS$ задаёт скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, а соответствующая норма $\|u\|' = \sqrt{(u, u)'}$ эквивалентна стандартной: $\exists \alpha > 0$, $\exists \beta > 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega)$

$$\beta^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|'_{H^1(\Omega)} \leq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Для функций $u_0, v \in H_0^1(\Omega)$ $(u_0, v)' = S_\varepsilon(u_0, v)$. Функционал $\tilde{E}_D$ на $H_0^1(\Omega)$

удовлетворяет условиям теоремы 2.1 об экстремали: форма S_2 согласована со стандартным скалярным произведением, а ф-л ℓ ограничен:

$$\begin{aligned} |\langle \ell, u_0 \rangle| &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_0\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|' \|u_0\|' \leq \\ &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \alpha^2 \|w\|_{H^1(\Omega)} \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \alpha^2 \|L\| \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

(вместо нормы $\|L\|$ оператора поднятия можно взять C). Мы показали ограниченность функционала ℓ над пространством $H_0^1(\Omega)$ в смысле стандартной нормы, но, конечно, ℓ будет ограничен относительно эквивалентной нормы $\|\cdot\|'$.

Пусть $\hat{u}_0 = \arg \min_{u_0 \in H_0^1(\Omega)} \tilde{E}_0(u_0)$. Необходимое условие экстремали означает, что $u = u_0 + w$ — обобщённое решение задачи Дирихле (2.8). Действительно,

$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad S_\alpha(\hat{u}_0, v) - \langle \ell, v \rangle = 0 \Leftrightarrow$
 $S_\alpha(\hat{u}_0 + w, v) = \int_\Omega f(x) v dx$ совпадает с
 интегральным тождеством (2.16) из
 определения (2.4).

3) Докажем единственность: пусть
 $u, \tilde{u} \in H^1(\Omega)$ — два обобщённых решения
 задачи (2.8). Тогда $u - \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ и
 $\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad S_\alpha(u - \tilde{u}, v) = 0 \Rightarrow u = \tilde{u}$.

4) Положим $v = \hat{u}_0$ и получим из
 необходимого условия экстремали:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} \|\hat{u}_0\|^2 &\leq S_\alpha(\hat{u}_0, \hat{u}_0) = \langle \ell, \hat{u}_0 \rangle \leq \\ &\leq \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \alpha^2 \|L\| \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \|\hat{u}_0\| \Rightarrow \\ \|\hat{u}_0\| &\leq \beta^2 \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \alpha^2 \|L\| \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \\ \text{Но тогда } \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \underbrace{\beta^2 \|f\|_{L_2(\Omega)}}_{C_1} + \underbrace{(1 + \alpha^2 \beta^2) \|L\| \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}_{C_2} \end{aligned}$$



Теорема 2.3. Пусть в дивергентном
равномерно эллип. оп-ре (2.2)
коэф-т $c \geq 0$ в Ω , а коэффициенты
в краевом условии задачи Робена
(2.10) $b \geq 0$ на $\partial\Omega$, причём $c \neq 0$
или $b \neq 0$. Тогда для каждого
 $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$ задача Робена
(2.10) имеет единственное обоб-
щённое решение $\hat{u} \in H^1(\Omega)$, и
справедлива априорная оценка
$$\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \quad (2.21)$$

с константами C_1, C_2 ,
зависящими от об-ти Ω , коэфф-ов
оператора (2.2) и граничного коэфф-та
 b , но не от правых частей f и φ .

Доказательство. 1) Симметрическая
билинейная форма

$$\tilde{S}(u, v) = S_2(u, v) + \int_{\partial\Omega} b(x) u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} dx$$

- по Теореме 1.15 скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, ассоциированная норма $\|\cdot\|'$ эквивалентна стандартной. В частности, справедливо пер-во: $\exists \beta > 0 \forall u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta \|u\|'.$$

2) линейный над $H^1(\Omega)$ функционал $\langle l, u \rangle = \int_{\Omega} f(x)u dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u|_{\partial\Omega} ds$ ограничен:

$$|\langle l, u \rangle| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)} \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

$$\|T\| \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}) \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

$\|T\| \|u\|_{H^1(\Omega)}$, где $T: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ - оператор следа.

3) Ф-л энергии (2.11) удовлетворяет теореме 2.1 об экстремали. Обозначим $\hat{u} = \arg \min_{u \in H^1(\Omega)} E_R(u)$. Необх. условие:

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \tilde{S}(\hat{u}, v) - \langle \ell, v \rangle = 0$$

означает, что $\hat{u}$ — обобщённое решение задачи Робена (2.10). Если $u \in H^1(\Omega)$ — другое обобщённое решение, то $\hat{u} - u$ удовл. $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\tilde{S}(\hat{u} - u, v) = 0 \Rightarrow \hat{u} = u.$$

4) Положим в необход. условии экстремали $v = \hat{u}$ и запишем

$$\frac{1}{\beta^2} \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \tilde{S}(\hat{u}, \hat{u}) = \langle \ell, \hat{u} \rangle \leq \|\ell\|^* \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} \Rightarrow \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\frac{\beta^2 \|\ell\|_{L_2(\Omega)}}{C_1} + \frac{\beta^2 \|\tau\| \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}}{C_2} \quad \square$$