

Лекция #10

Тема 3 "Обобщённые функции и фундаментальное решение"

План

1. Пространства основных и обобщённых функций.
2. Основные операции над обобщёнными функциями.
3. Свёртка, свёрточные ур-ия, свёрточные алгебры.
4. Преобразование Фурье.
5. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэфф-ми.

§1. Пространства основных и обобщённых функций

Определение 3.1. Пусть X — векторное пр-во над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функция $p: X \rightarrow [0; +\infty)$ называется полунормой, если:

(i) $\forall x_1, x_2 \in X \quad p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$
(нер-во треугольника);

(ii) $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C})$
 $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (однородность).

Если полунорма невырождена, т.е. $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, то она называется нормой.

Определение 3.2. Полинормированное пр-во — это пара $(X, \{p_j\}_{j \in J})$, состоящая из векторного пр-ва X и мн-ва полунорм $p_j, j \in J$, в этом пр-ве, удовл. аксиоме отделимости: $\forall j \in J \quad p_j(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Посл-ть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в полинормированном пр-ве, если она сходится относительно каждой полунормы.

Примеры. 1) Пусть S — непустое мн-во,

$X = \mathbb{R}^S$ — векторное пр-во всех ф-ий на S , принимающих значения в $\mathbb{R}$, с естественными линейными операциями. Положим $\forall s \in S \quad p_s(x) = |x(s)|$.

2) Если мн-во полунорм конечно и выполнена аксиома отделимости, то имеем пр-во с нормой $\|x\| = \sum_j p_j(x)$.

Пусть $(X, \{p_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ — счётно-нормированное пр-во. Полунормы p_k согласованы, если $\forall x \in X$

$$p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots$$

Согласование: $\{\tilde{p}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow$

$p_1 = \tilde{p}_1 + \dots + \tilde{p}_k$. Счётно-нормированное пр-во можно метризовать:

$$\varrho(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x_1 - x_2)}{1 + p_k(x_1 - x_2)}. \quad (3.1)$$

Определение 3.3. Счётно-нормированное пр-во называется пространством Фреше, если оно полное относительно

метрики (3.1).

Пример. Рассмотрим мн-во полунорм
(на самом деле норм) в $C^\infty(\bar{\Omega})$,
 $\Omega \in \mathbb{R}^n$: $\|\varphi\|_m = \|\varphi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{\bar{\Omega}} |D^\alpha \varphi|$.

Критерий Коши равно-
мерной сходимости $\Rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ - пр-во Фреше.

Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ - пос-ть ограни-
ченных об-тей, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \mathbb{R}^n$. У нас
есть оп-ры сужения $C_{k\infty}: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\bar{\Omega}_k)$,

$$C_{jk}: C^\infty(\bar{\Omega}_k) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega}_j), k \geq j.$$

Очевидно, C_{jk} - непрерывные линей-
ные отображения между пр-ми Фреше.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно рассматривать как
предел пр-в $C^\infty(\bar{\Omega}_k)$. Аналогичная
конструкция есть и для $C^\infty(\Omega)$, где
 Ω - произвольная область.

$C^\infty(\Omega)$ - пр-во Фреше!

Сходимость в $C^\infty(\Omega)$: пусть

$\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$ сходится к $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,
если $\forall K \subset \Omega \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$

$$\|\varphi_j - \varphi\|_{C^m(K)} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty.$$

Определение 3.4. Пр-во Шварца
 $S(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех быстро убываю-
щих ф-ий:

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \\ x^\alpha D^\beta \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty\}.$$

Пример быстро убывающей ф-ии:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{ Нетрудно показать,}$$

что $S(\mathbb{R}^n)$ - пр-во Фреше с нормами

$$\|\varphi\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Определение 3.5. Пусть Ω - область в $\mathbb{R}^n$.

Пр-во $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ состоит из всех
финитных бесконечно глф. (основных)
ф-ий.

Пр-во $\mathcal{D}(\Omega)$ имеет счётную нормировку. Определим непосредственно сходимость в $\mathcal{D}(\Omega)$.

Определение 3.6. Послед-ть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ сходится к ф-ии $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, если:

1) $\exists K \subset \Omega$, K -компакт, $\forall j \in \mathbb{N}$
 $\text{supp } \varphi_j, \text{supp } \varphi \subset K$;

2) $\forall m \in \mathbb{N} \quad \|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{C^m(K)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Задача. Почему сх-ть в $\mathcal{D}(\Omega)$ не порождается какой-либо счётной системой полунорм? Задать несчётную нормировку в $\mathcal{D}(\Omega)$.

Очевидны непрерывные вложения
 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Определение 3.7. Обобщённый ф-ии (над одним из пр-в $C^\infty(\Omega)$, $S(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{D}(\Omega)$) называется всякий непрерывный линейный ф-л над соответствующим пространством.

Обозначение: $\langle f, \varphi \rangle := f(\varphi)$ — действие
обобщённой φ -и на φ -ю φ .

- $C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'_0(\Omega)$ — пр-во финитных
в об-ти Ω обобщённых φ -и.
- $S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ — пр-во обобщён-
ных φ -и медленного роста;
- $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — пр-во всех
обобщённых φ -и.

Вложения пр-в обобщённых φ -и:

$$\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Определение 3.8. Послед-ть $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$
(* — слабо) сходится к $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, если
 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle f_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, j \rightarrow \infty.$

Замечание. В § 4 "преобразование
Фурье" будет определена сходимость
в $S'(\mathbb{R}^n)$ относительно двойственных
норм.

Рассмотрим некоторые примеры
обобщённых φ -и (о.ф.).

1) Регулярные о.ф. Составим ф-ии
 $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ л.и. ф-ии вида

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi(x) f(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

из т. Лебега следует пер-ть этого
ф-ии на $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Из
леммы Дюбуа-Реймона следует, что
оператор $L_{1,loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ инъективен.
Далее f и $\tilde{f}$ отождествляются. О.ф.,
которые получаются таким образом из
лок. суммируемых, называются
регулярными, остальные - сингулярными.

2) Дельта-функция. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$,
рассмотрим ф-ию δ_{x^0} , действующий
на гладкие ф-ии $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ по
ф-ле $\langle \delta_{x^0}, \varphi \rangle = \varphi(x^0)$. Линейность
и пер-ть очевидны. $\delta_{x^0} \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ -
дельта-функция Дирака с носителем
в точке x^0 . Если $x^0 = 0$, то $\delta_0 = \delta$.

3) Пусть μ - счётно-аддитивная мера на σ -алгебре борелевских подмн-в в $\mathbb{R}^n$, конечная на каждом ограниченном борелевском мн-ве.

Тогда ей соответствует о.ф. (плотность меры) $\delta_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n): \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \delta_\mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x).$$

(дельта-функция - плотность атомарной меры).

4) Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega \in C^1$ - замкнутая гиперповерхность,

$\varphi_1, \varphi_2 \in C(S)$

• простой слой $\varphi_1 \delta_S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ действует на гладкие ф-ии $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle \varphi_1 \delta_S, \varphi \rangle = \int_S \varphi(x) \varphi_1(x) dS.$$

• двойной слой $\varphi_2 \partial_{\vec{n}} \delta_S \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ действует на гладкие ф-ии $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ по ф-ле $\langle \varphi_2 \partial_{\vec{n}} \delta_S, \varphi \rangle = - \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \varphi_2(x) dS.$

5) Рассмотрим ф-ю $x \mapsto \frac{1}{x}$.
 Очевидно, $\frac{1}{x} \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, но
 $\frac{1}{x} \notin L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R})$. Хотелось бы найти
 такую сингулярную о.ф., чтобы
 она при сужении на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ давала
 $\frac{1}{x}$. Это главная часть $\mathcal{P} \frac{1}{x}$:

$$\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \psi \rangle = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx \right),$$

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
 Нетрудно видеть: $\mathcal{P} \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

§2. Основные операции над о.ф.

1) Умножение на гладкие ф-ии.
 Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $m \in C^\infty(\Omega)$. Тогда
 определим $mf \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по ф-ле:

$$\langle mf, \psi \rangle = \langle f, \underbrace{m\psi}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

С умножением о.ф. медленного роста

на гладкие ф-ии сложнее: если $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \nRightarrow m\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Определим

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{m \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \\ m\varphi \in S(\mathbb{R}^n)\} - \text{мн-во}$$

мультипликаторов Фурье. О.Ф.

$f \in S'(\mathbb{R}^n)$ можно умножать на $m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ по ф-ле

$$\langle mf, \varphi \rangle = \langle f, m\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Некоторые св-ва $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}$:

- 1) $\mathcal{L}$ - алгебра относительно естественного умножения;
- 2) $\mathcal{L}$ содержит все многочлены;
- 3) $\mathcal{L}$ состоит из аналитических в $\mathbb{R}^n$ ф-ий, растущих вместе со всеми производными не быстрее многочленов;
- 4) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^n)$ связаны преобразованием Фурье (см. § 4).

2) Дифференцирование о.ф.
из ф-лы интегрирования по частям
следует, что $\forall f \in C^k(\Omega), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi D^{\alpha} f dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^{\alpha} \varphi dx$$

для $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq k$. Возьмём эту
формулу за основу определения
производной о.ф. $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\langle D^{\alpha} f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^{\alpha} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Имеем $D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — непре-
рывный линейный оп-р. Опре-
деление производных для о.ф. из
 $S'(\mathbb{R}^n)$ аналогичное.

3) Замена переменных. Рассмотрим
 C^{∞} -диффеоморфизм областей Ω
и Q из $\mathbb{R}^n$: $\theta : \Omega \rightarrow Q$,

$$\Omega \ni x \mapsto y = \theta(x) \in Q.$$

Для интеграла первого рода будем
иметь $\int_Q f(y) \varphi(y) dy =$

$$= \int_{\Omega} f(\theta(x)) \psi(\theta(x)) \left| \det \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| dx,$$

где $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ — матрица Якоби отображе-
ния θ , $f \in L_1, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Тогда можно определить замену
переменных о.ф. — это будет не пр.
лин. отображение $\theta: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\langle (f \circ \theta)(x), \psi(x) \rangle = \langle f(y), \left| \det \frac{\partial \theta^{-1}}{\partial y} \right| (\psi \circ \theta^{-1})(y) \rangle.$$

Например, если $y = Ax + b$ (A —
невырожденная n -матр.), $\Omega = \mathcal{Q} = \mathbb{R}^n$, то

$$\langle f(Ax + b), \psi(x) \rangle = \langle f(y), \frac{1}{|\det A|} \psi(A^{-1}(y - b)) \rangle.$$

Проблема умножения о.ф.

Контрпример Л. Шварца.

К сожалению, во всём $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
не существует умножения, которое
было бы: 1) ассоциативным; 2) комму-
тативным; 3) с нейтральным элементом
1 (тожд. единица); 4) дистрибутивным;

5) согласованным с умножением на гладкие ф-ии, т.е. $\forall f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
 $\forall m \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad m(fg) = (mf)g$.
 Другими словами, в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ нельзя ввести структуру (ассоциативной и коммутативной) алгебры над кольцом $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ситуация в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ не лучше.

Контрпример Л. Шварца:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \mathcal{F} \frac{1}{x} = (x \delta(x)) \mathcal{F} \frac{1}{x} = (\delta(x)x) \mathcal{F} \frac{1}{x} = \\ &= \delta(x) (x \mathcal{F} \frac{1}{x}) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x). \end{aligned}$$