

Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка

Задача 1. Найти общее решение квазилинейного уравнения первого порядка

$$(x + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y + u) \frac{\partial u}{\partial y} = x + y.$$

Задача 2. Решить стандартную задачу Коши для линейного уравнения первого порядка в указанной области

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \arctan x. \end{cases}$$

Задача 3. Получить решение задачи Коши в явном виде и построить (в одной из математических сред либо вручную на листе бумаги) двумерную область влияния:

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2, \\ u = x^2, y = 1, 0 < x < 1. \end{cases}$$

Задача 4. Построить какие-либо обобщённые решения в области $\{t > 0\}$ квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sin u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

которые после любого изменения на множестве меры нуль не становились бы классическими.

Задача 5. Решить задачу Римана о распаде разрыва для уравнения

$$u_t + u_x \cos u = 0 \text{ с начальным условием } u|_{t=0} = \begin{cases} \pi & \text{при } x < 0, \\ 2\pi & \text{при } x > 0. \end{cases} \text{ Проверить}$$

условие Ранкина-Гюгонио и условие возрастания энтропии.

Задача 6. Построить обобщённое энтропийное решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sin 2u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, u|_{t=0} = \begin{cases} -\frac{5\pi}{4} & \text{при } x < 0, \\ \frac{5\pi}{4} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Чтобы получить зачёт за четвёртое общее дом. задание, необходимо
03.05.24 (upd: 24.03.25) —1— Версия 1.0

правильно решить любые четыре задачи из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **конец весеннего семестра 2024/25 уч.г.**

Ресурсы для решения общего дом. задания #4

1. [Материалы](#) к практическим занятиям по теме «Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка».
2. [Презентация](#) лекционной темы #3 «Уравнения первого порядка».
3. А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин. Уравнения с частными производными первого порядка: учебное пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999: <http://new.math.msu.su/diffur/pde-first.pdf>
4. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.