

Операции над обобщёнными функциями

Задача 1. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f = \{0\}$. Доказать, что f однозначно представляется в виде $f = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta$.

Задача 2. Найти общее решение уравнения $(x+1)^2 y'' = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Задача 3. Доказать, что $\delta(x_1) \otimes \dots \otimes \delta(x_n) = \delta(x_1, \dots, x_n)$.

Задача 4. Найти свёртку $(\theta(x) \otimes \delta(t)) * \left(\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ и указать её носитель (θ — функция Хевисайда).

Задача 5. Вычислить свёртку $-\frac{1}{|x|} * \partial_{\vec{v}} \delta_{S_R}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, где $\partial_{\vec{v}} \delta_{S_R}$ — двойной слой на сфере $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$, действующий на основные функции по формуле

$$\left(\partial_{\vec{v}} \delta_{S_R}, \varphi \right) = - \int_{S_R} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}} ds.$$

Задача 6. Найти преобразование Фурье обобщённой функции $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ — главной части $\frac{1}{x}$, действующей на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ по формуле

$$\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Чтобы получить зачёт за третье общее дом. задание, необходимо правильно решить любые четыре задачи из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **24.05.25, 23:59**.

Ресурсы для решения общего дом. задания #3

1. [Материалы](#) к практическим занятиям по теме «Операции над обобщёнными функциями».
2. [Презентация](#) лекционной темы #3 «Обобщённые функции и фундаментальное решение».
3. В.С. Владимиров. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
4. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

5. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.
6. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.