

Вариационные проблемы уравнений в частных производных

Задача 1. Доказать, что для всех функций $v \in H^1(0,1)$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 ((v')^2 + 2xv) dx + v(0)^2 + v(1)^2 \geq -\frac{41}{270}.$$

Имеет ли место знак равенства для какой-либо функции из указанного пространства?

Задача 2. Рассмотрим кольцо $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$. Дать вариационную формулировку краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \text{ в } \Omega, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \\ u|_{\rho=2} = 0, \end{cases}$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ — полярный радиус, θ — полярный угол.

Задача 3. Доказать, что для всех функций $u \in C_0^1(D)$, где $D \in \mathbb{R}^2$ — стандартный диск, выполнено неравенство

$$\iint_D 2x_1x_2u dx_1dx_2 \leq \frac{\pi}{1152} + \iint_D |\nabla u|^2 dx_1dx_2.$$

Задача 4. Пусть $Q = (0,1) \times (0,1)$ — квадрат. Доказать, что для любой функции $u \in H_0^1(Q)$, удовлетворяющей интегральному равенству

$$\iint_Q u \sin(\pi x) \sin(\pi y) dx dy = 0,$$

справедливо неравенство Фридрихса-Стеклова вида

$$\iint_Q u^2 dx dy \leq \frac{1}{5\pi^2} \iint_Q |\nabla u|^2 dx dy.$$

Задача 5. Пусть $Q = (0,\pi)^{\times 3}$ — куб. Среди функций $u \in H^1(Q)$, принимающих граничные значения

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_2=0} = u|_{x_3=0} = u|_{x_1=\pi} = u|_{x_2=\pi} = u|_{x_3=\pi} = 0,$$

найти ту, которая доставляет минимум функционалу

$$E(u) = \iiint_Q |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 dx_3 + \int_0^\pi dx_1 \int_0^\pi u|_{x_3=\pi} \sin x_1 \sin x_2 dx_2.$$

Задача 6. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 < |x| < 2\}$ — шаровой слой. Среди функций $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=2} = 0$, найти ту, которая доставляет минимум функционалу

$$E(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2u) dx + \int_{|x|=1} u^2 ds.$$

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Чтобы получить зачёт за второе общее дом. задание, необходимо правильно решить любые четыре задачи из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **26.04.25, 23:59**.

Ресурсы для решения общего дом. задания #2

1. [Материалы](#) к практическим занятиям по теме «Вариационные проблемы уравнений в частных производных».
2. [Презентация](#) и конспекты лекционной темы #2 «Эллиптические операторы второго порядка».
3. Владимир В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.