

Разделение переменных в полярных и сферических координатах

Задача 1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце $\Omega = \{1 < \rho < 2\}$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < \rho < 2, -\infty < \theta < \infty, \\ u(\rho, \theta + 2\pi) \equiv u(\rho, \theta), \\ u|_{\rho=1} = \varphi_1(\theta), u|_{\rho=2} = \varphi_2(\theta), \end{cases}$$

выполнив разделения переменных в полярных координатах ρ, θ . Получить интегральную формулу

$$u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} K_1(\nu, \rho, \theta) \varphi_1(\nu) d\nu + \int_0^{2\pi} K_2(\nu, \rho, \theta) \varphi_2(\nu) d\nu$$

и явные выражения для интегральных ядер K_1, K_2 (желательно конечные, но можно и в виде рядов).

Задача 2. Найти все собственные значения и собственные функции спектральной задачи в стандартном диске

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ в } \mathbb{D}, \\ u|_{\partial\mathbb{D}} = 0, \end{cases}$$

разделив переменные в полярных координатах, предполагая, что каждая собственная функция $u(\rho, \theta) = Z(\rho)Y(\theta)$ (ρ, θ — полярные координаты).

Задача 3. Найти функцию $u = u(\rho, \theta, \nu)$ (ρ — радиус, θ — широта, ν — долгота), гармоническую внутри сферы радиуса R с центром в начале координат и такую, что

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} + u \right|_{\rho=R} = \sin \theta (\sin \nu + \cos \nu \cos \theta + \sin \theta).$$

Задача 4. Разложить потенциал Ньютона-Кулона $V(x^0) = \int_{\Omega} \frac{dx}{|x - x^0|}$

однородного эллипсоида вращения

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{A^2} + \frac{x_3^2}{C^2} < 1 \right\}$$

в ряд по сферическим функциям во внешнем ($x^0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$) и внутреннем ($x^0 \in \Omega$) случаях.

Задача 5. Найти функцию $u = u(\rho, \theta, \nu)$ (ρ — радиус, θ — широта, ν — долгота), гармоническую внутри шарового слоя $1 < \rho < 2$ и такую, что

$$u|_{\rho=1} = \sin \theta \sin \nu (5 + 6 \cos \theta), u_{\rho}|_{\rho=2} = 12 \sin 2\theta \sin \nu.$$

Задача 6. Найти все собственные значения и собственные функции противоположного оператора Лапласа-Бельтрами на полусфере $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ с граничным условием Дирихле, т.е. решить спектральную задачу

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ в } M, \\ u|_{\partial M} = 0, \end{cases}$$

выполнив разделение переменных в сферических координатах и предполагая, что каждая собственная функция $u(\theta, \nu) = V(\theta)W(\nu)$ (θ — широта, ν — долгота).

Задание выполняется на стандартных листах А4 чёрной или тёмно-синей ручкой, сдаются преподавателю в руки на лекциях / практических занятиях, или высылаются на alexander@baikov.org, или отправляются в LMS на [странице](#) курса. Чтобы получить зачёт за первое общее дом. задание, необходимо правильно решить любые четыре задачи из предложенных шести. Дедлайн для всех групп — **05.04.25, 23:59**.

Ресурсы для решения общего дом. задания #1

1. [Материалы](#) к практическим занятиям по теме «Краевые задачи: разделение переменных в полярных и сферических координатах».
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.
3. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2004.